第十四次作业

1. 解:

(1) $\chi_A=|tE-A|=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$

若 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则 A可对角化（第二章推论8.8：$A\in M_n(F)$，若χ_A在F中有n个不同的根，则A可对角化）

$\therefore$ A $J_A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$

若 $\lambda_1=\lambda_2\triangleq\lambda$，$\chi_A=(t-\lambda)^2$，$\because$ A不是数乘矩阵且 $\mu_A|\chi_A$ $\therefore\mu_A=(t-\lambda)^2$

因此λ的代数重数是2，且关于λ的 Jordan 块最大阶数也是2.

$\Rightarrow$ $J_A=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$

(2) $\chi_B=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$.

若 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则 B可对角化，$\therefore J_B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$

若 $\lambda_1=\lambda_2\triangleq\lambda$，$\chi_B=(t-\lambda)^2$ 和(1)中类似讨论可得 $J_B=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$

2. 解:

(1) 法一：$A^t=\begin{pmatrix}J_3(\alpha) & 0\\ 0 & J_2(\beta)\end{pmatrix}$. 且 $A\sim_s A^t$ $\therefore J_A=J_{A^t}=A^t=\begin{pmatrix}J_3(\alpha) & 0\\ 0 & J_2(\beta)\end{pmatrix}$.

法二：$\chi_A=|tE-A|=(t-\alpha)^3(t-\beta)^2$.

① $\alpha\neq\beta$. $\mathrm{rank}(\alpha E-A)=4\Rightarrow\dim V^\alpha=1$

$\mathrm{rank}(\beta E-A)=4\Rightarrow\dim V^\beta=1$ $\Rightarrow J_A=\begin{pmatrix}J_3(\alpha) & 0\\ 0 & J_2(\beta)\end{pmatrix}$.

α, β的代数重数分别是3, 2.
几何重数都是1

② $\alpha=\beta$. $\chi_A=(t-\alpha)^5$. $\mathrm{rank}(\alpha E-A)=3\Rightarrow\dim V^\alpha=2$. α几何重数为2
代数重数为5.

设 $\mu_A(t)=(t-\alpha)^k, 1\le k\le5$. $\because$ $A-\alpha E\neq0$ 且 $(A-\alpha E)^3=0$ $(A-\alpha E)^2\neq0$ $\therefore\mu_A(t)=(t-\alpha)^3$.

$\therefore$ 关于α的 Jordan 块最大阶数是3. $\Rightarrow J_A=\begin{pmatrix}J_3(\alpha) & 0\\ 0 & J_2(\alpha)\end{pmatrix}$

另证：由 $\operatorname{rank}((A-\alpha E)^0)=5$，$\operatorname{rank}((A-\alpha E)^1)=3$，$\operatorname{rank}((A-\alpha E)^2)=1$.

$\therefore n_1 = 5+1-2\times 3=0$. 即没有关于$\alpha$的1阶Jordan块 $\Rightarrow J_A=\begin{pmatrix} J_3(\alpha) & 0 \\ 0 & J_2(\alpha) \end{pmatrix}$

(2) $\chi_B = |tE-B| = (t-\lambda)^4$

$\operatorname{rank}(\lambda E-B)=2 \Rightarrow \dim V^{\lambda} = 4-2=2$.　λ的代数重数是4，几何重数是2.

计算μ_B：设$\mu_B=(t-\lambda)^k$，$1\le k\le 4$. $\because B-\lambda E=\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$，且$(B-\lambda E)^2=0$.

$\therefore \mu_B=(t-\lambda)^2$. 即关于$\lambda$的Jordan块最大阶数是2

$\Rightarrow J_B=\begin{pmatrix} J_2(\lambda) & 0 \\ 0 & J_2(\lambda) \end{pmatrix}$

另证：$\because \operatorname{rank}((B-\lambda E)^0)=4$，$\operatorname{rank}((B-\lambda E)^1)=2$，$\operatorname{rank}((B-\lambda E)^2)=0$

$\therefore n_1 = 4+0-2\times 2=0$. 即没有关于$\lambda$的1阶Jordan块 $\Rightarrow J_B=\begin{pmatrix} J_2(\lambda) & 0 \\ 0 & J_2(\lambda) \end{pmatrix}$.

3. 解：

$\chi_A=(t-1)^4(t+1)^3t^2 \Rightarrow$ ~~关于~~ 1，-1，0的代数重数分别是4，3，2.

$\mu_A=(t-1)^3(t+1)^3t^2 \Rightarrow$ 关于1，-1，0的Jordan块最大阶数分别是3，3，2.

$\Rightarrow J_A=\begin{pmatrix} J_1(1) & & & \\ & J_3(1) & & \\ & & J_3(-1) & \\ & & & J_2(0) \end{pmatrix}$

4. 证：幂零矩阵A，B的极小多项式形如 $\mu_A=\mu_B=t^k$，$1\le k\le n$.

故0是A，B唯一特征根.

$\because \operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$ $\therefore \dim V_A^0=\dim V_B^0$. 即关于A，B，0的几何重数相同

$\because \mu_A=\mu_B$ $\therefore$ 关于A，B，0的Jordan块最大阶数相同.

综上：A，B特征根只有0，且关于0的Jordan块的个数，最大阶数相同.

(1) $n=4$ 时，证 $A\sim_s B$.

以 $rank(A)=rank(B)=0,1,2,$ or 3 分类讨论；或者以 $\mu_A=\mu_B=t, t^2, t^3, t^4$ 分类讨论

[$\because A.B$ 幂零 $\therefore \exists k\in\mathbb{Z}^+$ s.t. ~~$|A|$~~ $A^k=0 \Rightarrow |A|^k=0 \Rightarrow |A|=0$ 即 A 不满秩，同理 B 不满秩]

法一：下以 $rank(A)=rank(B)=0,1,2,3$ 分类讨论

① $rank(A)=rank(B)=0 \Rightarrow A=B=0 \Rightarrow A\sim_s B$

② $rank(A)=rank(B)=1$. 关于 0 的 Jordan 块有 3 块

$$J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_2(0)\end{pmatrix}=J_B$$

③ $rank(A)=rank(B)=2$. 关于 0 的 Jordan 块有 2 块

$$J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) & \\ & J_3(0)\end{pmatrix}=J_B, \text{ or } J_A=\begin{pmatrix} J_2(0) & \\ & J_2(0)\end{pmatrix}=J_B.$$

(若 $J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) & \\ & J_3(0)\end{pmatrix}$, $J_B=\begin{pmatrix} J_2(0) & \\ & J_2(0)\end{pmatrix}$ 则与 $\mu_A=\mu_B$ 矛盾.)

④ $rank(A)=rank(B)=3$. 关于 0 的 Jordan 块只有 1 块.

$$J_A=\left(J_4(0)\right)=J_B$$

法二：以 $\mu_A=\mu_B=t, t^2, t^3, t^4$ 分类讨论

① $\mu_A=\mu_B=t \Rightarrow A=B=0 \Rightarrow A\sim_s B$.

② $\mu_A=\mu_B=t^2$ 关于 0 的 Jordan 块最大阶数是 2.

$$J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_2(0)\end{pmatrix}=J_B \text{ or } J_A=\begin{pmatrix} J_2(0) & \\ & J_2(0)\end{pmatrix}=J_B.$$

不会有 $J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_2(0)\end{pmatrix}$, $J_B=\begin{pmatrix} J_2(0) & \\ & J_2(0)\end{pmatrix}$ (此时 $rank(A)\neq rank(B)$)

③ $\mu_A=\mu_B=t^3$ 关于 0 的 Jordan 块最大阶数是 3.

$$J_A=J_B=\begin{pmatrix} J_3(0) & \\ & J_1(0)\end{pmatrix}$$

④ $\mu_A=\mu_B=t^4$. 关于 0 的 Jordan 块最大阶数是 4. $J_A=J_B=J_4(0)$

3

(2). $n=5$，仍有 $A\sim_s B$，讨论方法与(1)类似。

① $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=0$. $A=B=0 \Rightarrow A\sim_s B$

② $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=1$. $J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) & & & \\ & J_1(0) & & \\ & & J_1(0) & \\ & & & J_2(0) \end{pmatrix}=J_B$

③ $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=2$. $J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_3(0) \end{pmatrix}=J_B$ or $J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) & & \\ & J_2(0) & \\ & & J_2(0) \end{pmatrix}=J_B$

④ $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=3$. $J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) & \\ & J_4(0) \end{pmatrix}=J_B$ or $J_A=\begin{pmatrix} J_2(0) & \\ & J_3(0) \end{pmatrix}=J_B$

⑤ $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=4$. $J_A=J_5(0)=J_B$.

Note: ① 类似可证明：$n=6$ 时，$A\sim_s B$.

综上，幂零矩阵 $A,B\in M_n(\mathbb{C})$，$n\le 6$ 时，$A\sim_s B \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$ 且 $\mu_A=\mu_B$.

② $n=7$ 时，结论不再成立。

例如：$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=4$ $\mu_A=\mu_B=t^3$.

可能会出现 $J_A=\begin{pmatrix} J_3(0) & & \\ & J_3(0) & \\ & & J_1(0) \end{pmatrix}$，$J_B=\begin{pmatrix} J_3(0) & & \\ & J_2(0) & \\ & & J_2(0) \end{pmatrix}$

$A\not\sim_s B$.

5. 证：$A \sim_s J_A$. 设 $J_A = B + C$. 其中 B 是 J_A 对角线上元素，其余元素为0.

设 $J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$，则 $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_s E_{d_s} \end{pmatrix}$

$\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ 是 A 特征根.

$d_1, \dots, d_s \in \mathbb{Z}^+$ 且 $d_1 + \dots + d_s = n$.

$C = \begin{pmatrix} J_{d_1}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_s}(0) \end{pmatrix}$

先证 C 是幂零矩阵：

$\because (J_{d_i}(0))^{d_i} = 0$　令 $d = \max\{d_1, \dots, d_s\}$.

则 $C^d = \begin{pmatrix} (J_{d_1}(0))^d & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (J_{d_s}(0))^d \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow C$ 是幂零矩阵.

$\because A \sim_s J_A$　$\therefore \exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ s.t.

$$A = P^{-1} J_A P = P^{-1}(B+C)P = \underbrace{P^{-1}BP}_{S} + \underbrace{P^{-1}CP}_{N}.$$

其中 $N^d = P^{-1}C^dP = 0$ $\therefore N$ 也是幂零矩阵

Note：本题是定理"线性算子可以唯一写成一个可对角化的算子和一个幂零算子之和"的特殊情形

该定理的存在性即为第5题，难点是证唯一性.

可参考李老师去年习题课讲义：第二章习题讲义5 例2.4（存在性）

第二章习题讲义6 命题4.1（唯一性）

第二章习题讲义7 定理4.1（Jordan-Chevalley分解）

6. 证：$J_n(1) \sim_s J_n(1)^k$，$k \in \mathbb{Z}^+$.

证：$J_n(1)^k = (J_n(0)+E_n)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} J_n(0)^i = \begin{pmatrix} 1 & k & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & k \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

法一：$\chi_{J_n(1)^k}(t) = (t-1)^n$ 且 $\operatorname{rank}(J_n(1)^k - E) = n-1$.

$\therefore$ 1是 $J_n(1)^k$ 唯一特征根且几何重数是1 $\Rightarrow J_n(1)^k \sim_s J_n(1)$.

法二：$\chi_{J_n(1)} = \chi_{J_n(1)^k} = (t-1)^n$. 计算可得，$\operatorname{rank}((J_n(1)-E)^j) = \operatorname{rank}((J_n(1)^k - E)^j) = n-j$，$j=0,1,\cdots,n$.

由相似判别法II可知，$J_n(1)^k \sim_s J_n(1)$