第十四次习题课

一、作业中的问题以及补充.

1. (1) $\chi_A=\chi_B=(t-4)^2(t-2)$

(2) 计算极小多项式的方法:

1> 定义: $f(\mathcal{A})=0$ 非零的零化多项式中次数最小

$$\Updownarrow$$

$$p\mid f.$$

eg. $\mu_0=t$, $\mu_\varepsilon=t-1$, $\mu_{\mathcal{A}}=t^k$ (幂零).

2> 引理 5.7: $\mu_{\mathcal{A}}=\mathrm{lcm}(\mu_{\mathcal{A}_{V_1}},\mu_{\mathcal{A}_{V_2}})$.

3> 有的时候用(根像分解II)判断 $\mu_{\mathcal{A}}$.

4> V 是 $\mathcal{A}$-循环时, $\mu_{\mathcal{A}}=\chi_{\mathcal{A}}$.

5> H-C. 及 H-C 加强版.

χ_A 中的不可约因子子为 $\mu_{\mathcal{A}}$ 因子.

故 $\mu_{\mathcal{A}}(t)=(t-2)(t-4)$. $\quad(\because (A-4E)(A-2E)=0)$

$\mu_B(t)=(t-2)(t-4)^2$ $\quad(\because (B-2E)(B-4E)\neq 0)$.

(3). $\mathrm{spec}_F(A)=\{2,4\}$. 4的代数重数为2.

$\mathrm{rank}(4E-A)=1 \Rightarrow \dim(V^4)=2.$

2的代数重数为1. $\Rightarrow \dim(V^2)=1.$

$\Bigg\}$ 两个 $J_1(4)$, 一个 $J_1(2)$.

$$J_A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

同理: 4的代数重数为2. 几何重数为1.

2的代数重数为1.

$\Bigg\}\Rightarrow$ 一个 $J_2(4)$, 一个 $J_1(2)$.

$$J_B=\begin{pmatrix}4&1&0\\0&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

2.

$$A = J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

解. $\chi_A = |tE - A| = (t-\lambda)^n$

$$(A-\lambda E)^m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}^m$$ 若 $m<n$. $(A-\lambda E)^m \neq 0$.

$\therefore \mu_A = (t-\lambda)^n$.

$$A^k = (\lambda E + J_n(0))^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} (J_n(0))^i$$

1) $k \le n$. 则

$$A^k = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & k+1 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & & k\lambda^{k-1} \\ & & & & & \lambda^k \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \leftarrow k+1 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

2) $k > n$ 则

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \cdots & \binom{k}{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & k\lambda^{k-1} \\ & & & \lambda^k \end{pmatrix}$$

a. 若 A 可对角化 则 $A \sim_S \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix} = B$ 而 $\mu_B = t-\lambda$.

$n>1$ 则 $\mu_A \neq \mu_B$ 故不可对角化.

b. $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(J_n(\lambda)) = \{\lambda\}$. 极小多项式有重根.

c. $\mathrm{rank}\,(A-\lambda E) = n-1 \Rightarrow \dim(V^\lambda) = 1$

λ 的代数重数为 n, 几何重数为 1. 不可对角化.

3. (1) $\mathrm{rank}(A-3E)=2$. $\dim(V^3)=5-2=3$.

3的代数重数为4, 几何重数为3. $J_1(3)$, $J_1(3)$, $J_2(3)$.

$$J_A=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}3&1\\0&3\end{matrix}} & & & \\ & 3 & & \\ & & 3 & \\ & & & -2 \end{pmatrix}$$

(2). a. 3的代数重数为4, 几何重数为4. ✓.

b. 几何重数为2. ×.

c. 几何重数为1. ✓.

eg 1. 确定 $M_3(\mathbb{C})$ 中所有的 Jordan 标准型.

解: 设 $A\in M_3(\mathbb{C})$, $\chi_A=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)$. $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{C}$.

Case 1: $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 两两不同. 此时 A 可对角化.

$$J_A=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_1(\lambda_1)&&\\&J_1(\lambda_2)&\\&&J_1(\lambda_3)\end{pmatrix}.$$

Case 2. $\chi_A=(t-\lambda_1)^2(t-\lambda_2)$. $\lambda_1\neq\lambda_2$.

若 $\mu_A=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$, 则 A 可对角化. (一次因子之积).

$$J_A=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_1&0\\0&0&\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_1(\lambda_1)&&\\&J_1(\lambda_1)&\\&&J_1(\lambda_2)\end{pmatrix}.$$

若 $\mu_A=(t-\lambda_1)^2(t-\lambda_2)$ 则 A 不可对角化

$$J_A=\begin{pmatrix}\lambda_1&1&0\\0&\lambda_1&0\\0&0&\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_2(\lambda_1)&\\&J_1(\lambda_2)\end{pmatrix}$$

Case 3. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3 := \lambda$.

如果 $\mu_A = t-\lambda$，则 A 可对角化.

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & & \\ & J_1(\lambda) & \\ & & J_1(\lambda) \end{pmatrix}.$$

若 $\mu_A = (t-\lambda)^2$

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_2(\lambda) & \\ & J_1(\lambda) \end{pmatrix}$$

若 $\mu_A = (t-\lambda)^3$，则 J_A 中 λ 的 Jordan 块最大阶数为 3.

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = J_3(\lambda).$$

eg2. 设4阶复矩阵.

$$A = \begin{pmatrix} J_2(0) & \\ & J_2(0) \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_1(0) \end{pmatrix}.$$

则 $\chi_A = \chi_B$ 且 $\mu_A = \mu_B$. 但 $\mathrm{rank}(A) \neq \mathrm{rank}(B)$. $A \not\sim_s B$. $\square$.

注: 当 A, B 是两个三阶复矩阵时.

$$A \sim_s B \Longleftrightarrow \chi_A = \chi_B.$$

而 eg2. 说明4阶不可以.

补充习题2: $J_n(\lambda)^k$ 的 Jordan.

设 $B = J_n(\lambda)^k$，则 $\chi_B = (t-\lambda^k)^n$. 因为

$$\mathrm{rank}(B-\lambda^k E) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 0 & k\lambda^{k-1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & k\lambda^{k-1} \\ & & & 0 \end{pmatrix} = n-1. \Longrightarrow \dim(V^{\lambda^k}) = 1.$$

$$J_B = J_n(\lambda^k).$$

4. 设V是域F上的n维线性空间，$\mathscr{A}$为V上的线性算子. 证明：若V的某个循环子空间可以分解成两个$\mathscr{A}$-子空间的直和，则这两个$\mathscr{A}$-子空间也是循环子空间.

注：要证循环子空间 $\Rightarrow$ 定义来证

$\Rightarrow$ 等价定理 $\dim(V)=\deg(\mu_{\mathscr{A}})$.

方法一：设U为V上循环子空间 且 $U=U_1\oplus U_2$，U_1, U_2为$\mathscr{A}$-子空间

$d=d_1+d_2$

$\because$ U为循环子空间

$\therefore \exists \vec{v}\in V$，$U=F[\mathscr{A}]\cdot\vec{v}=\{p(\mathscr{A})(\vec{v})\mid p\in F[t]\}=\langle\vec{v},\mathscr{A}(\vec{v}),\cdots \mathscr{A}^{d-1}(\vec{v})\rangle$

$\because U=U_1\oplus U_2$

$\therefore \exists!\ \vec{v_1}\in U_1$，$\vec{v_2}\in U_2$ s.t $\vec{v}=\vec{v_1}+\vec{v_2}$

下证 $U_1=F[\mathscr{A}]\cdot\vec{v_1}$，$U_2=F[\mathscr{A}]\cdot\vec{v_2}$

先证 $U_1=F[\mathscr{A}]\cdot\vec{v_1}$.

$\forall \vec{u}\in U_1\subset U$ $\quad \exists\ \vec{u}=\underset{U_1}{\underset{\cap}{\vec{u}}}+\underset{U_2}{\underset{\cap}{\vec{0}}}$ ①

又$\because U=\{p(\mathscr{A})(\vec{v})\mid p\in F[t]\}$

$\therefore \exists f\in F[t]$ s.t $\vec{u}=f(\mathscr{A})\vec{v}=f(\mathscr{A})(\vec{v_1})+f(\mathscr{A})(\vec{v_2})$ ②

$\because U_1$是$\mathscr{A}$-不变$^{\text{子空间}}$

$\therefore \vec{v_1}\in U_1$

$\Longrightarrow \mathscr{A}(\vec{v_1})\in U_1\Rightarrow\mathscr{A}^2(\vec{v_1})\in U_1\Rightarrow\cdots\Rightarrow\mathscr{A}^k(\vec{v_1})\in U_1\Rightarrow f(\mathscr{A})(\vec{v_1})\in U_1$

同理 $f(\mathscr{A})(\vec{v_2})\in U_2$.

又由直和分解唯一得（由①，②）.

$f(\mathscr{A})(\vec{v_1})=\vec{u}$，$f(\mathscr{A})(\vec{v_2})=\vec{0}$

故$\forall \vec{u}\in U_1$ $\quad\exists f(t)$ s.t $\vec{u}=f(\mathscr{A})(\vec{v_1})$

即$\vec{u}$是$\vec{v_1},\mathscr{A}(\vec{v_1}),\cdots\mathscr{A}^{d_1-1}(\vec{v_1})$的线性组合 则 $U_1=\langle\vec{v_1},\cdots\mathscr{A}^{d_1-1}(\vec{v_1})\rangle$

$=F[\mathscr{A}]\cdot\vec{v_1}$.

同理 $U_2=F[\mathscr{A}]\cdot\vec{v_2}$

方法二：$\dim(U)=d$，$\dim(U_1)=d_1$，$\dim(U_2)=d_2$．$d=d_1+d_2$．

$\mathcal{A}$限制在U，U_1，U_2上的极小多项式为μ，μ_1，μ_2．

要证U_1，U_2为循环子空间

只需证$\deg(\mu_1)=d_1$，$\deg(\mu_2)=d_2$即可．

$\because$ U是循环子空间

$\therefore \dim(U)=\deg(\mu)=d$．

$\because$ U_1，U_2为$\mathcal{A}$-子空间．

$\therefore \mu=\mathrm{lcm}(\mu_1,\mu_2) \Rightarrow \deg(\mu)\leq\deg(\mu_1)+\deg(\mu_2)$．

$\because$ $\mu_1 \mid \chi_{\mathcal{A}|U_1}$

$\therefore \deg(\mu_1)\leq\deg(\chi_{\mathcal{A}|U_1})=\dim(U_1)=d_1$

同理$\deg(\mu_2)\leq d_2$

则$d_1+d_2\leq\deg(\mu_1)+\deg(\mu_2)\leq d_1+d_2$．

$\Longrightarrow \deg(\mu_1)=d_1$，$\deg(\mu_2)=d_2$．

5．对于矩阵$A\in M_n(\mathbb{C})$，关系式$A^N=E$成立，当且仅当A可以对角化同时它的特征值都是N次单位根。

证："$\Longrightarrow$" $f(t)=t^N-1$是A的零化多项式$\Rightarrow \mu_A \mid f(t)$．

$\because$ $f(t)$的根两两不同 $\therefore$ μ_A的根两两不同

$\Rightarrow$ A可对角化，特征值也为μ_A的根．则均为N单位根．

"$\Longleftarrow$" 设 $A\sim_s\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 其中λ_i均为N次单位根．

$\exists P\in GL_n(\mathbb{C})$ s.t. $A=P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P \Rightarrow A^N=P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^N & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^N\end{pmatrix}P$

$=E_n$

□

6. 对线性空间的维数 n 作归纳法.

证: $n=1$ 时, $V=\langle\alpha\rangle$, $\mathscr{A}_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 在 V 的基 α 下的矩阵为1级矩阵,

从而是对角矩阵.

假设对于维数小于 n 的线性空间命题为真, 现在看 n 维.

$\because$ $\mathscr{A}_1$ 可对角化.

$\therefore$ $V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}$. ($\lambda_1,\cdots\lambda_s$ 是 $\mathscr{A}_1$ 的所有不同特征值).

若 $s=1$, 则 $V=V_{\lambda_1}$

$\Longrightarrow$ $\mathscr{A}_1$ 是 V 上数乘算子 $\lambda_1\mathcal{E}$.

它在 V 的任何一个基下的矩阵都是数乘矩阵.

故不必考虑 $\mathscr{A}_1$, 转而考虑 $\mathscr{A}_2$.

因此不妨设 $s\geq 2$, $\forall j\in\{1,2,\cdots,s\}$ $\because$ $\mathscr{A}_j$ 与 $\mathscr{A}_1$ 可交换. $\therefore$ V_{λ_j} 是 $\mathscr{A}_i$ 的不变子空间.

由上次习题课 eg 6.方法二得到.

从而 $\mathscr{A}_i|_{V_{\lambda_j}}$ 是 V_{λ_j} 上的线性变换, $i=1,2,\cdots,m$.

由于 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots\mathscr{A}_m$ 可交换.

故 $\mathscr{A}_1|_{V_{\lambda_j}}$, $\mathscr{A}_2|_{V_{\lambda_j}}$, $\cdots$ $\mathscr{A}_m|_{V_{\lambda_j}}$ 两两可交换.

设 $\mathscr{A}_i|_{V_{\lambda_j}}$ 的极小多项式为 $m_{ij}(\lambda)$

A_i 的极小多项式 $m_i(\lambda)=\operatorname{lcm}(m_{i1}(\lambda),\cdots,m_{is}(\lambda))$.

$\because$ A_i 可对角化.

$\therefore$ A_i 的极小多项式 $m_i(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可分解为一次因子之积.

$\Longrightarrow$ $m_{ij}(\lambda)$ 也可分解.

$\Longrightarrow$ $A_i|_{V_{\lambda_j}}$ 可对角化 $i=1,2,\cdots,m$.

$\because \dim V_{\lambda_j} < \dim V = n.$

因此对于限制在 V_{λ_j} 的线性算子

$\mathcal{A}_1|_{V_{\lambda_j}}, \cdots \mathcal{A}_m|_{V_{\lambda_j}}$

假设存在 V_{λ_j} 的一个基 $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \cdots \alpha_{jn_j}$

s.t. $\mathcal{A}_1|_{V_{\lambda_1}} \cdots \mathcal{A}_m|_{V_{\lambda_j}}$ 在此基下的矩阵为对角阵.

$A_{1j} \cdots A_{mj}.$

于是 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots \mathcal{A}_m$ 在 V 的基

$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots \alpha_{1n_1}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \cdots, \alpha_{2n_2}, \cdots \alpha_{s1}, \cdots \alpha_{sn_s}.$

下的矩阵.

$A_1 = \mathrm{diag}\{A_{11}, A_{22}, \cdots A_{1s}\}$

$A_2 = \mathrm{diag}\{A_{21}, A_{22}, \cdots A_{2s}\}$

$\cdots$

$A_m = \mathrm{diag}(A_{m1}, A_{m2}, \cdots A_{ms}\}.$

由第二数学归纳法.
对一切正整数 n 成立.

法二: A_i 可对角化 $\Leftrightarrow$ n 个不同 $\vec{\alpha}_{ik}$

$A_i \vec{\alpha}_{ik} = \lambda_k \vec{\alpha}_{ik}, \quad \lambda_k \in F.$

$A_i A_j \vec{\alpha}_{ik} = A_j A_i \vec{\alpha}_{ik} = \lambda_k A_j \vec{\alpha}_{ik}$

$A_j \vec{\alpha}_{ik} \in V^{\lambda_k} \quad \exists\, \beta_k \quad \underline{\text{s.t. } A_j \vec{\alpha}_{ik} = \beta_k \vec{\alpha}_{ik}}$

二、课程内容回顾及补记.

12. 初等因子组.

1) 定义

2) 任何 V 的 $\mathscr{A}$-不可分子空间直和分解, 初等因子组相同;

$F=\mathbb{C}$ 时, 初等因子组唯一确定 Jordan 标准型.

初等因子组可通过计算若干矩阵的秩得到.

3)
$$n_l = \frac{1}{d}(r_{l-1} + r_{l+1} - 2r_l)$$

$$N(i,l) = \frac{1}{d_i}(R(i,l-1) + R(i,l+1) - 2R(i,l)).$$

13. 矩阵相似的判定.