第十五次习题课

一、作业中的问题及例子补充.

1. $\chi_A = \chi_B = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$.

注意讨论λ_1与λ_2的取值相同与否。

a. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 可对角化. $J_A = J_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

b. $\lambda_1 = \lambda_2 \triangleq \lambda$. $J_A = J_B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

$\mu_A = \mu_B = (t-\lambda)^2$
$\Downarrow$
关于λ的Jordan块最大阶数是2.

2. (1) 法一: $A^t = \begin{pmatrix} J_3(\alpha) & 0 \\ 0 & J_2(\beta) \end{pmatrix}$ 且 $A \sim_s A^t$

$\therefore J_A = J_{A^t} = A^t = \begin{pmatrix} J_3(\alpha) & 0 \\ 0 & J_2(\beta) \end{pmatrix}$.

法二: $\chi_A = |tE - A| = (t-\alpha)^3(t-\beta)^2$.

① $\alpha \neq \beta$ $\quad rank(\alpha E - A) = 4 \Rightarrow \dim V^\alpha = 1$
$\quad rank(\beta E - A) = 4 \Rightarrow \dim V^\beta = 1$
$\Rightarrow J_A = \begin{pmatrix} J_3(\alpha) & 0 \\ 0 & J_2(\beta) \end{pmatrix}$.

α, β的代数重数分别是3, 2.
几何重数都是1.

② $\alpha = \beta$ $\quad \chi_A = (t-\alpha)^5 \quad rank(\alpha E - A) = 3 \Rightarrow \dim V^\alpha = 2$.

$\left.\begin{array}{l} \alpha\text{的几何重数为}2. \\ \text{代数重数为}5. \end{array}\right\} \Rightarrow 1, 4 \text{ or } 2, 3.$

验证: $\mu_A(t) = (t-\alpha)^3$. 关于α的Jordan块最大阶数是3.

$$J_A = \begin{pmatrix} J_3(\alpha) & 0 \\ 0 & J_2(\alpha) \end{pmatrix}.$$

另证: $\because$ $rank((A-\alpha E)^0)=5$, $rank((A-\alpha E)^1)=3$, $rank((A-\alpha E)^2)=1$.

$\therefore$ $n_1=5+1-2\times 3=0$. 即没有关于α的1阶Jordan块.

$$\Longrightarrow J_A=\begin{pmatrix} J_3(\alpha) & 0 \\ 0 & J_2(\alpha) \end{pmatrix}.$$

(2). $\chi_B=|tE-B|=(t-\lambda)^4$. λ的代数重数是4.

$rank(\lambda E-B)=2 \Longrightarrow \dim V^{\lambda}=4-2=2$. 几何重数是2.

计算μ_B: 设$\mu_B=(t-\lambda)^k$ $1\le k\le 4$.

$$\because B-\lambda E=\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

且$(B-\lambda E)^2=0$

$\mu_B=(t-\lambda)^2$ 即关于λ的Jordan块最大阶数是2.

$$J_B=\begin{pmatrix} J_2(\lambda) & 0 \\ 0 & J_2(\lambda) \end{pmatrix}.$$

另证: $\because$ $rank((B-\lambda E)^0)=4$, $rank((B-\lambda E)^1)=2$, $rank((B-\lambda E)^2)=0$.

$\therefore$ $n_1=4+0-2\times 2=0$. 即没有关于λ的1阶Jordan块.

$$J_B=\begin{pmatrix} J_2(\lambda) & 0 \\ 0 & J_2(\lambda) \end{pmatrix}.$$

3. 解: $\chi_A=(t-1)^4(t+1)^3t^2 \Rightarrow$ 关于1, -1, 0的代数重数分别是4, 3, 2.

$\mu_A=(t-1)^3(t+1)^3t^2 \Rightarrow$ 关于1, -1, 0的Jordan块最大阶数分别是3, 3, 2.

$$\Longrightarrow J_A=\begin{pmatrix} J_1(1) &&& \\ & J_3(1) && \\ && J_3(-1) & \\ &&& J_2(0) \end{pmatrix}$$

4. 设幂零矩阵$A,B\in M_n(\mathbb{C})$满足$rank(A)=rank(B)$且$\mu_A=\mu_B$.

(i) 证明: 当$n=4$时, $A\sim_s B$.

(ii) 当$n=5$时, $A\sim_s B$是否成立? 并说明你的结论。

证：幂零矩阵 A,B 的极小多项式形如 $m_A=m_B=t^k$，$1\le k\le n$.

故 0 是 A,B 唯一特征根.

$\because rank(A)=rank(B)$ $\therefore \dim(V_A^0)=\dim(V_B^0)$ 即关于 A,B 0 的几何重数相同

$\because m_A=m_B$ $\therefore$ 关于 A,B. 0 的 Jordan 块最大阶数相同.

(1) $n=4$ 时, 证 $A\sim_s B$.

以 $rank(A)=rank(B)=0,1,2$ or 3 分类讨论

或者以 $m_A=m_B=t,t^2,t^3,t^4$ 分类讨论.

[$\because A,B$ 幂零 $\therefore \exists k\in\mathbb{Z}^+$ s.t $A^k=0 \Rightarrow |A|^k=0 \Rightarrow |A|=0$

即 A 不满秩, 同理 B 不满秩.]

法一：下以 $rank(A)=rank(B)=0,1,2,3$ 分类讨论.

① $rank(A)=rank(B)=0 \Longrightarrow A=B=0 \Longrightarrow A\sim_s B$.

② $rank(A)=rank(B)=1$. 关于 0 的 Jordan 块有 3 块.

$$J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_1(0)\end{pmatrix}=J_B.$$

③ $rank(A)=rank(B)=2$. 关于 0 的 Jordan 块有 2 块.

$$J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) & \\ & J_3(0)\end{pmatrix}=J_B \quad \text{or} \quad J_A=\begin{pmatrix} J_2(0) & \\ & J_2(0)\end{pmatrix}=J_B.$$

若一个 1,3 分 一个 2,2 分, 则 $m_A=m_B$ 矛盾.

④ $rank(A)=rank(B)=3$ 关于 0 的 Jordan 块只有 1 块.

$$J_A=J_4(0)=J_B.$$

法二：以 $m_A=m_B=t,t^2,t^3,t^4$ 分类讨论.

① $m_A=m_B=t \Longrightarrow A=B=0 \Longrightarrow A\sim_s B$.

② $m_A=m_B=t^2$ 关于 0 的 Jordan 块最大阶数是 2.

$$J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_2(0)\end{pmatrix}=J_B \quad \text{or} \quad J_A=\begin{pmatrix} J_2(0) & \\ & J_2(0)\end{pmatrix}=J_B.$$

③ $\mu_A=\mu_B=t^3$ 关于0的Jordan块最大阶数是3.

$$J_A=J_B=\begin{pmatrix} J_3(0) & \\ & J_1(0)\end{pmatrix}.$$

④ $\mu_A=\mu_B=t^4$ 关于0的Jordan块最大阶数是4. $J_A=J_B=J_4(0)$.

(2). $n=5$ 仍有 $A\sim_s B$

① $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=0$ $A=B=0 \Longrightarrow A\sim_s B$.

② $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=1$

$$J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) &&& \\ & J_1(0) && \\ && J_1(0) & \\ &&& J_2(0)\end{pmatrix}=J_B.$$

③ $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=2$.

$$J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) && \\ & J_1(0) & \\ && J_3(0)\end{pmatrix}=J_B \quad \text{or} \quad J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) && \\ & J_2(0) & \\ && J_2(0)\end{pmatrix}=J_B.$$

④ $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=3$.

$$J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) & \\ & J_4(0)\end{pmatrix}=J_B \quad \text{or} \quad J_A=\begin{pmatrix} J_2(0) & \\ & J_3(0)\end{pmatrix}=J_B$$

⑤ $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=4$.

$$J_A=J_5(0)=J_B.$$

$n=6$. ✓.

幂零矩阵 $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ $n\le 6$时, $A\sim_s B \Longleftrightarrow \mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$ 且 $\mu_A=\mu_B$.

$n=7$时, 结论不再成立. eg. $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=3$. $\mu_A=\mu_B=t^3$

可能会出现

$$J_A=\begin{pmatrix} J_3(0) && \\ & J_3(0) & \\ && J_1(0)\end{pmatrix} \quad J_B=\begin{pmatrix} J_3(0) && \\ & J_2(0) & \\ && J_2(0)\end{pmatrix}$$

$A\not\sim_s B$.

5. 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$. 证明：存在可对角化矩阵 S 和幂零矩阵 N s.t

$$A=S+N.$$

证：$A\sim_s J_A$. 设 $J_A=B+C$. 其中 B 对角线上元素是 J_A 对角线上元素. 其余元素为 0.

设 $J_A=\begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_s}(\lambda_s)\end{pmatrix}$ 则 $B=\begin{pmatrix}\lambda_1 E_{d_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_s E_{d_s}\end{pmatrix}$

$\lambda_1,\cdots,\lambda_s\in\mathbb{C}$ 是A的特征根.

$d_1,\cdots d_s\in\mathbb{Z}^+$ 且 $d_1+\cdots+d_s=n$.

$C=\begin{pmatrix}J_{d_1}(0) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_s}(0)\end{pmatrix}$

先证C是幂零矩阵：

$\because (J_{d_i}(0))^{d_i}=0$　　令 $d=\max\{d_1,\cdots d_s\}$.

则 $C^d=\begin{pmatrix}(J_{d_1}(0))^d & & \\ & \ddots & \\ & & (J_{d_s}(0))^d\end{pmatrix}=0\Rightarrow C$ 是幂零矩阵.

$\because A\sim_s J_A$. $\therefore \exists\, P\in GL_n(\mathbb{C})$ s.t.

$$A=P^{-1}J_AP=P^{-1}(B+C)P=\underset{\substack{\parallel\\ S}}{P^{-1}BP}+\underset{\substack{\parallel\\ N}}{P^{-1}CP}.$$

其中 $N^d=P^{-1}C^dP=0$　$\therefore N$ 也是幂零矩阵.

6. 证：$J_n(1)\sim_s J_n(1)^k$　　$k\in\mathbb{Z}^+$.

证：$J_n(1)^k=(J_n(0)+E_n)^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}J_n(0)^i=\begin{pmatrix}1 & k & & *\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & k\\ & & & 1\end{pmatrix}$.

法一：$\chi_{J_n(1)^k}(t)=(t-1)^n$ 且 $\mathrm{rank}(J_n(1)^k-E)=n-1$.

$\therefore 1$ 是 $J_n(1)^k$ 唯一特征根且几何重数是1 $\Longrightarrow J_n(1)^k\sim_s J_n(1)$.

法二：$\chi_{J_n(1)}=\chi_{J_n(1)^k}=(t-1)^n$ 计算可得

$\mathrm{rank}((J_n(1)-E)^j)=\mathrm{rank}((J_n(1)^k-E)^j)=n-j$, $j=0,1,\cdots,n$.

由相似判别法II可知. $J_n(1)^k\sim_s J_n(1)$.

关于Jordan标准型的例子.

eg1. 设n是偶数. 计算

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

的Jordan标准型.

解: 直接计算 $A^2=2A$. 因为A不是数乘矩阵, 所以 $\mu_A=t^2-2t=t(t-2)$.

于是, A可对角化且A两个特征根 $\lambda_1=0$ 和 $\lambda_2=2$. 我们只要判定 J_A 的主对角线上有多少 λ_1 和 λ_2 即可.

设 $n=2k$, $R(\lambda_1,0)=2k$, $R(\lambda_1,1)=k$.

$\because$ $A^2=2A$

$\therefore$ $R(\lambda_1,2)=k$.

$\therefore$ $N(\lambda_1,1)=2k+k-2k=k$.

由此可知 $N(\lambda_2,1)=k$. 故 $J_A=\begin{pmatrix} O_{k\times k} & \\ & 2E_k \end{pmatrix}$ □.

eg2. 设n是偶数. 计算 $J_n(0)^2$ 的Jordan标准型。

解: 设 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的标准基. 则 $J_n(0)=(0,\vec{e_1},\cdots,\vec{e}_{n-1})$. 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$. 则

$$AJ_n(0)=(\vec{A}^{(1)},\cdots,\vec{A}^{(n)})(\vec{0},\vec{e_1},\cdots,\vec{e}_{n-1})=(\vec{0},\vec{A}^{(1)},\cdots\vec{A}^{(n-1)}).$$

于是 $B:=J_n(0)^2=(\vec{0},\vec{e_1},\cdots,\vec{e}_{n-1})(\vec{0},\vec{e_1},\cdots,\vec{e}_{n-1})=(\vec{0},\vec{0},\vec{e_1},\cdots,\vec{e}_{n-2})$.

由此可知 $$AB=(\vec{0},\vec{0},\vec{A}^{(1)},\cdots,\vec{A}^{(n-2)}).$$

设 $n=2k$. 我们有 $$B^k=0 \text{ 但 } B^{k-1}\neq 0.$$

故 $\mu_B=t^k$ 直接计算得

$$n_k=r_{k-1}+r_{k+1}-2r_k=2+0-0=2.$$

$$J_B=\begin{pmatrix} J_k(0) & \\ & J_k(0) \end{pmatrix}.$$

二、关于不变量

定义1：设 $A, B \in F^{m\times n}$，如果存在 $P \in GL_m(F)$ 和 $Q \in GL_n(F)$ s.t. $B = PAQ$，则称 A 与 B 初等等价，记为 $A \sim_e B$.

矩阵的秩是初等不变量。事实上，$A \sim_e B \iff \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.

秩是(一组)关于初等等价的完全不变量。

定义2：设 $A, B \in M_n(F)$，如果存在 $P \in GL_n(F)$ s.t. $B = P^t A P$，则称 A 与 B 合同，记为 $A \sim_c B$.

矩阵的秩是合同不变量，对称和斜对称性也是合同不变量。

a. 设 $A, B \in SM_n(\mathbb{C})$，则 $A \sim_c B \iff \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.

(即对复矩阵而言，秩是(一组)关于合同等价的完全不变量。)

b. 设 $A, B \in SM_n(\mathbb{R})$ 则 $A \sim_c B \iff$ 它们的签名相同.

(对实对称矩阵而言，签名是(一组)关于合同等价的完全不变量。).

c. 设 $A, B \in SSM_n(F)$，$\mathrm{char}(F) \neq 2$，则 $A \sim_c B \iff \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.

(即对于斜对称矩阵而言，秩是(一组)关于合同等价的完全不变量。).

定义3：设 $A, B \in M_n(F)$ 如果存在 $P \in GL_n(F)$ s.t. $B = P^{-1}AP$，则称 A 与 B 相似，记为 $A \sim_s B$.

矩阵的秩，迹，行列式，各阶主子式之和，极小多项式，特征多项式，特征根.

定义4：设 $f: M_n(F) \longrightarrow S$ 的映射，其中 S 是一个集合。如果对任意 $A, B \in M_n(F)$，$f(AB) = f(BA)$，则称 f 是关于方阵的交换不变量。

矩阵的迹，行列式是交换不变量。

!矩阵的特征多项式是交换不变量。

证：设 $A, B \in M_n(F)$，我们要证 $\chi_{AB}(t) = \chi_{BA}(t)$.

当 A 可逆时，$AB \sim_s BA$. 因为特征多项式是相似不变量

所以 $\chi_{AB}(t) = \chi_{BA}(t)$.

eg. 极小多项式不是交换不变量. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \text{ 和 } B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

直接计算得 $\operatorname{rank}(AB)=1$ 和 $\operatorname{rank}(BA)=0$. 于是 $\mu_{BA}=t$ 但 $\mu_{BA}\neq t$.

事实上, $\mu_{AB}=t^2$.