第十五次作业解答

1. 设标准欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的标准基是 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. 计算 $\|\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_n\|$.

   解. $\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_n = (1, \ldots, 1)^t$. 故

$$\|\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_n\| = \sqrt{1^2 + \cdots + 1^2} = \sqrt{n}.$$

2. 设 $V = \mathbb{R}[x]^{(3)}$ 是欧式空间, 其中内积是

$$(f|g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

   计算 x 的长度和 从 1 到 x^2 的距离.

   解.

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} = \sqrt{\int_0^1 x^2\, dx} = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

$$\|x^2 - 1\| = \sqrt{(x^2 - 1|x^2 - 1)} = \sqrt{\int_0^1 (x^2 - 1)^2\, dx} = \sqrt{\frac{8}{15}}.$$

3. 设 V 是欧式空间, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. 证明:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2.$$

   解. 由定义可知

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}|\mathbf{u} + \mathbf{v}) + (\mathbf{u} - \mathbf{v}|\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\
&= (\mathbf{u}|\mathbf{u}) + 2(\mathbf{u}|\mathbf{v}) + (\mathbf{v}|\mathbf{v}) + (\mathbf{u}|\mathbf{u}) - 2(\mathbf{u}|\mathbf{v}) + (\mathbf{v}|\mathbf{v}) \\
&= 2(\mathbf{u}|\mathbf{u}) + 2(\mathbf{v}|\mathbf{v}) \\
&= 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2 \quad \square
\end{aligned}$$

4. 设 V 是欧式空间, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$.

   (i) 设 $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m\mathbf{v}_m$, $\mathbf{y} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_m\mathbf{v}_m$. 证明:

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)\begin{pmatrix}\beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m\end{pmatrix}.$$

(ii) 设 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, $\mathbf{x}\in V$. 证明: $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 当且仅当 $(\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)=0$, $i=1,\dots,n$.

证. *(i)* 由双线性可知

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y})=(\sum_{i=1}^{m}\alpha\mathbf{v}_i|\sum_{j=1}^{m}\beta_j\mathbf{v}_j)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\beta_j(\mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j)=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\mathrm{G}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}.$$

(ii) 设 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. 则由双线性可知 $(\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)=(\mathbf{0}|\mathbf{e}_i)=0$, $i=1,\dots,n$. 反之, 设 $(\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)=(\mathbf{0}|\mathbf{e}_i)=0$, $i=1,\dots,n$. 令

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n.$$

则

$$(\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)=0\implies\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j)x_j=0,\quad i=1,\dots,n.$$

即

$$\mathrm{G}(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\mathbf{0}_n.$$

由第三章第一讲命题 *1.6* 可知, $\mathrm{G}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ 可逆. 故 $x_1=\cdots=x_n=0$. 从而 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. □

5. 设 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. 证明:

   (i) A 是幂零矩阵当且仅当 J_A 是幂零矩阵.

   (ii) A 是幂零矩阵当且仅当 $\mathrm{tr}(A^k)=0$, $k=1,2,\dots,n$.

证. *(i)* 因为 $A\sim_s J_A$, 所以存在 $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 使得

$$J_A=P^{-1}AP.$$

故 $A^m=O$ 当且仅当 $J_A^m=O$. 于是, 矩阵 A 是幂零矩阵当且仅当存在 $m\in\mathbb{Z}^+$ 使得 $A^m=O$.

(ii) 由 (i) 和矩阵的迹是相似不变量可知, 我们只要证明 J_A 是幂零的当且仅当 $\mathrm{tr}(J_A^k)=0$, $k=1,\dots,n$. (注意到 $A^k\sim_s J_A^k$). 因为 Jordan 块是上三角的,

所以

$$J_d(\lambda)^k=\begin{pmatrix}\lambda^k & * & * & \cdots & * \\ & \lambda^k & * & \cdots & * \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \lambda^k\end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 $*$ 代表某些实数.

设 J_A 是幂零矩阵. 则存在 $m\in\mathbb{Z}^+$ 使得 $J_A^m=O$. 由 (1) 可知, J_A 的对角线上的元素都等于零. 再由 (1) 可知, J_A^k 的对角线元素也都等于零. 故 $\operatorname{tr}(J_A^k)=0$.

反之, 设 $\operatorname{tr}(J_A^k)=0$, $k=1,\ldots,n$. 不妨设

$$J_A=\begin{pmatrix}M_{d_1}(\lambda_1) & & & \\ & M_{d_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_{d_s}(\lambda_s)\end{pmatrix},$$

其中 $M_{d_i}(\lambda_i)$ 是 d_i 阶上三角矩阵, 其对角线上元素都是 λ_i, $i=1,\ldots,s$, 且 $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ 两两不同. 上述形式可以通过把 J_A 中具有相同特征根的 Jordan 块相邻排放得到. 与推导 (1) 类似

$$J_A^k=\begin{pmatrix}M_{d_1}^{(k)}(\lambda_1^k) & & & \\ & M_{d_2}(\lambda_2^k) & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_{d_s}^{(k)}(\lambda_s^k)\end{pmatrix},$$

其中 $M_{d_i}^{(k)}(\lambda_i)$ 是 d_i 阶上三角矩阵, 其对角线上元素都是 λ_i^k, $k=1,\ldots,n$. 由此得出

$$\sum_{i=1}^{s} d_i\lambda_i^k=0,\quad k=1,\ldots,n.$$

则前 s 个方程是

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^s & \lambda_2^s & \cdots & \lambda_s^s\end{pmatrix}}_{B}\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\\ \vdots\\ d_s\end{pmatrix}=\mathbf{0}_s.$$

因为 $d_1,\ldots,d_s$ 全不等于零, 所以 $\det(B)=0$. 由范德蒙德行列式的性质可知

$$\det(B)=\lambda_1\cdots\lambda_s\prod_{1\leq i<j\leq s}(\lambda_j-\lambda_i)=0.$$

因为 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$ 两两不同, 所以 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$ 中有且仅有一个等于零. 不妨设 $\lambda_1=0$. 则上述方程组变为

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_2 & \cdots & \lambda_s\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_2^{s-1} & \cdots & \lambda_s^{s-1}\end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix}d_2\\ \vdots\\ d_s\end{pmatrix}=\mathbf{0}_s.$$

但 $\lambda_2,\ldots,\lambda_s$ 两两不同且非零. 故 $\det(C)\neq 0$. 于是, $d_2=\cdots=d_s=0$. 矛盾. 故 $s=1$. 即

$$J_A=M_n(0).$$

特别地, J_A 特征多项式等于 t^n. 由 Hamilton-Cayley 定理, $J_A^n{=}O$. 故 J_A 是幂零的.