第十六次习题课

一. 作业中的问题及例子补充.

1, 2, 3 根据定义直接计算即可.

注: 计算距离时不要漏掉"$\sqrt{\ }$".

4. 设V是欧式空间, $\vec{v_1}, \cdots \vec{v_m} \in V$.

(i) 设 $\vec{x} = a_1\vec{v_1} + \cdots + a_m\vec{v_m}$, $\vec{y} = \beta_1\vec{v_1} + \cdots + \beta_m\vec{v_m}$. 证明:

$$(\vec{x}|\vec{y}) = (a_1, \cdots a_m) G(\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_m}) (\beta_1 \cdots \beta_m)^t.$$

证: $(\vec{x}|\vec{y}) = (\sum_{i=1}^m a_i\vec{v_i} \,|\, \sum_{j=1}^m \beta_j\vec{v_j}) = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m a_i\beta_j(\vec{v_i}|\vec{v_j}) = (a_1 \cdots a_m) G \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$.

(ii) 设 $\vec{e_1}, \cdots \vec{e_n}$ 是V的一组基, $\vec{x} \in V$. 证明: $\vec{x} = \vec{0} \iff (\vec{x}|\vec{e_i}) = 0$. $i = 1, 2, \cdots, n$.

"$\Longrightarrow$" $\vec{x} = \vec{0}$ 则 $(\vec{x}|\vec{e_i}) = (\vec{0}|\vec{e_i}) = 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 反之, 设

"$\Longleftarrow$" $(\vec{x}|\vec{e_i}) = (\vec{0}|\vec{e_i}) = 0$, $i = 1, \cdots, n$ 令

$$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \cdots + x_n\vec{e_n}$$

则 $(\vec{x}|\vec{e_i}) = 0 \Longrightarrow \sum_{j=1}^n (\vec{e_i}|\vec{e_j}) x_j = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n.$

即 $$G(\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{0}_n$$

$\text{rank}(G) < n. \Rightarrow G$ 可逆 $\Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0. \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$. $\square$.

5. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 证明:

(i) A是幂零矩阵当且仅当 J_A 是幂零矩阵.

(ii) A是幂零矩阵当且仅当 $tr(A^k) = 0$, $k = 1, 2, \cdots, n$.

证: (i) 因为 $A \sim_s J_A$, 所以存在 $P \in GL_n(\mathbb{C})$ s.t.

$$J_A = P^{-1}AP.$$

故 $A^m = 0 \iff J_A^m = 0$. 于是, 矩阵A是幂零矩阵 $\iff \exists\, m \in \mathbb{Z}^+$ s.t. $A^m = 0$.

(ii). 由(i)和矩阵的迹是相似不变量.

只需证: J_A 是幂零 $\Longleftrightarrow$ $tr(J_A^k)=0$. $(A^k \sim_s J_A^k)$.

因为 Jordan 块是上三角的.

$$J_d(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & \cdots & \cdots & \vdots \\ & \lambda^k & & \vdots \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda^k \end{pmatrix} \quad (1).$$

"$\Longrightarrow$"

设 J_A 是幂零矩阵. 则 $\exists m\in\mathbb{Z}^+$ s.t $J_A^m=0$.

由(1)可知, J_A 的对角线元素为 0.

J_A^k ------也为 0. $\Rightarrow$ $tr(J_A^k)=0$.

"$\Longleftarrow$" 设 $tr(J_A^k)=0$. $k=1,\cdots,n$. 不妨设

$$J_A = \begin{pmatrix} M_{d_1}(\lambda_1) & & & \\ & M_{d_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_{d_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

其中 $M_{d_i}(\lambda_i)$ 是 d_i 阶上三角矩阵, 其对角线上元 λ_i, $i=1,2,\cdots s$.

且 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 两两不同. 上述形式可以通过把 J_A 中具有相同特征根的 Jordan 块相邻排放得到. 与推导(1)类似

$$J_A^k = \begin{pmatrix} M_{d_1}^{(k)}(\lambda_1^k) & & & \\ & M_{d_2}^k(\lambda_2^k) & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_{d_s}^k(\lambda_s^k) \end{pmatrix}$$

其中 $M_{d_i}^{(k)}(\lambda_i^k)$ 是 d_i 阶上三角矩阵, 其对角线上元素都是 λ_i^k, $k=1,\cdots,s$.

由此得出 $$\sum_{i=1}^{s} d_i\lambda_i^k=0, \quad k=1,\cdots,n.$$

则前 s 个方程是

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^s & \lambda_2^s & \cdots & \lambda_s^s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_s \end{pmatrix} = \vec{0}_s$$

因为$d_1,\cdots d_s$全不为零. $\det(B)=0$.

由范德蒙德行列式性质

$$\det(B)=\lambda_1\cdots\lambda_s\prod_{1\le i<j\le s}(\lambda_j-\lambda_i)=0.$$

$\because$ $\lambda_1,\cdots\lambda_s$互不同.

$\therefore$ $\lambda_1,\cdots\lambda_s$有且仅有一个为零.（不妨设$\lambda_1=0$）.

则

$$\begin{pmatrix}\lambda_2 & \cdots & \lambda_s\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_2^s & \cdots & \lambda_s^s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_2\\ \vdots\\ d_s\end{pmatrix}=\vec{0}_s$$

$\because$ $\lambda_2\cdots\lambda_s$互不同不为零

$\therefore$ $d_2=\cdots=d_s=0$ 矛盾.

故 $s=1$, 即 $J_A=M_n(0)$.

特别地. J_A的特征多项式 $\chi_{J_A}=t^n$

由H-C $J_A^n=0$. $\Rightarrow$ J_A幂零。 $\square$.

方法二:（直接证明法）（某位同学的思路）.

"$\Longrightarrow$" $\because$ A是幂零矩阵

$\therefore$ $\chi_A=t^n$

$\therefore$ $A\sim_s\begin{pmatrix}J_{d_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_s}(0)\end{pmatrix}$ $\therefore$ $A^k\sim_s\begin{pmatrix}J_{d_1}^k(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_s}^k(0)\end{pmatrix}$.

$\therefore$ $(tr(A^k))=tr\begin{pmatrix}J_{d_1}^k(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_s}^k(0)\end{pmatrix}=0.$

"$\Longleftarrow$" 设$\chi_A=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_n)$ $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$两两互不相同.

$\therefore$ $A\sim_s\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ $tr(A)=\lambda_1+\cdots+\lambda_n$

又 $\because A^m \sim_s \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^m \end{pmatrix}$ $tr(A^m) = \lambda_1^m + \cdots + \lambda_n^m$

$$\chi_A = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$$

$$= t^n - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)t^{n-1} + \overbrace{\cdots}^{(-1)^k \sum \lambda_{i1}\cdots\lambda_{ik} t^{n-k}} + (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

$\because \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0 \qquad \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 = 0.$

$$(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)^2 - (\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2) = 2\sum \lambda_i \lambda_j = 0.$$

设 $A_k = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k$

$B_k = \sum \lambda_{i1} \cdots \lambda_{ik}$

$\because A_k - BA_{k-1} + B_2 A_{k-2} + \cdots + (-1)^k B_k = 0$

$A_i = 0$

$\therefore B_k = 0$

$\therefore \chi_A = t^n$

$\therefore \mu_A \mid \chi_A \quad \therefore A^n = 0 \Rightarrow A$ 幂零。

eg1. 设 $A \in GL_n(\mathbb{C})$. 证明对任意的 $k \in \mathbb{Z}^+$, 存在 $X \in GL_n(\mathbb{C})$ s.t $X^k = A$.

证: 先证明存在 $Y \in GL_n(\mathbb{C})$ s.t $Y^k = J_n(\lambda)$ 其中 $\lambda \neq 0$. 注意到

$$J_n(\lambda) = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \lambda^{-1} & & & \\ & 1 & \lambda^{-1} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda^{-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{B.}$$

$B \sim_s B^k$. 故存在 $P \in GL_n(\mathbb{C})$ s.t $B = P^{-1}B^kP$. 设 $C = P^{-1}BP$.

则 $C^k = B$. 令 $Y = \lambda^{\frac{1}{n}} C$. 则 $Y^k = \lambda B = J_n(\lambda)$.

再证明存在 $Z \in GL_n(\mathbb{C})$ s.t $Z^k = J_A$. 设.

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_e}(\lambda_e) \end{pmatrix}$$

因为A可逆，所以$\lambda_1, \cdots \lambda_s$都不等于零.

于是存在$Y_i \in GL_{d_i}(\mathbb{C})$ s.t $Y_i^k = J_{d_i}(\lambda_i)$, $i=1, 2, \cdots l$, 令

$$Z = \begin{pmatrix} Y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Y_k \end{pmatrix}.$$

即可. 设 $A = P^{-1} J_A P$, 其中 $P \in GL_n(\mathbb{C})$. 令 $X = P^{-1} Z P$. 则

$$X^k = P^{-1} Z^k P = P^{-1} J_A P = A.$$

□.

二. 课程内容回顾及补充

1. 欧式空间

1.1 V上的内积

1. 定义: 双线性型, 对称, 正定

eg2. 设 $n\in\mathbb{Z}^+$. 在 $\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 中定义: 对任意 $f,g\in\mathbb{R}[x]_{n+1}$,

$$(f|g)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k}{n}\right).$$

证明 (1) 是 $\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 上的内积并计算 $\|x\|$.

解: 先验证双线性型: $\forall f,g,h\in\mathbb{R}[x]_{n+1}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$(\alpha f+\beta h|g)=\sum_{k=0}^{n}(\alpha f+\beta h)\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(\alpha f)\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k}{n}\right)+(\beta h)\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$=\alpha\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k}{n}\right)+\beta\sum_{k=0}^{n}h\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$=\alpha(f|g)+\beta(h|g).$$

同理可验证对第二个位置满足线性性.

再验证对称: $\forall f,g\in\mathbb{R}[x]_{n+1}$

$$(f|g)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)f\left(\frac{k}{n}\right)=(g|f).$$

正定: $\because\ (f|f)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)^2\geq 0$

所以 $(f|f)$ 是半正定的.

如果 $(f|f)=0$, 则 $f(k/n)=0$, $k=0,1,\cdots,n$. 于是, f 至少有 $n+1$ 个互不相同的根. 因为 $\deg(f)\leq n$, 所以 $f=0$

(理由: 设 $F\subset K$ 是两个域, $\alpha\in K$, $f\in F[x]$ 且 $d=\deg(f)>0$

(i) $f(\alpha)=0 \Longleftrightarrow \operatorname{rem}(f,x-\alpha)=0$

(ii) f 在 K 中至多有 d 个互不相同的根.)

故 $(f|f)$ 是正定的.

直接计算得

$$\|x\|^2=(x|x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}.$$

2. $G(\vec{v_1},\cdots\vec{v_m})=((\vec{v_i}|\vec{v_j}))_{m\times m}$.

1.3 长度、距离、角度和正交 (注意 Cauchy-Bunyakovski inequality)

eg3. 设 $\mathbb{R}^4$ 是标准欧式空间. 设

$$\vec{v_1}=(1,3,2,-1)^t,\quad \vec{v_2}=(-4,2,-3,1)$$

计算 $\|\vec{v_1}\|$, $\|\vec{v_2}\|$ 和这两个向量的夹角.

解: 直接计算得

$$\|\vec{v_1}\|=\sqrt{1^2+3^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{15}$$

$$\|\vec{v_2}\|=\sqrt{(-4)^2+2^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{30}.$$

$$\arccos\left(\frac{(\vec{v_1}|\vec{v_2})}{\|\vec{v_1}\|\,\|\vec{v_2}\|}\right)=\arccos\left(\frac{-5}{15\sqrt{2}}\right)=\arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{6}\right)$$

eg4. 设 V 是 n 维欧式空间, $\vec{x},\vec{y}\in V$ 的夹角是 θ. 证明:

$$\|\vec{x}-\vec{y}\|^2=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2-2\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\cos(\theta).$$

证: 直接计算得

$$\begin{aligned}\|\vec{x}-y\|^2&=(\vec{x}-\vec{y}|\vec{x}-\vec{y})\\&=(\vec{x}|\vec{x})-2(\vec{x}|\vec{y})+(\vec{y}|\vec{y})\\&=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2-2\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\frac{(\vec{x}|\vec{y})}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}\\&=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2-2\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\cos\theta\end{aligned}$$

$\square$.

1.3 单位正交基

1. Gram-Schmidt 正交化.

① 先正交化. $\varepsilon_i'=\vec{v_i}-\Sigma(\vec{v_i}|\varepsilon_{i-1})$

② 单位化.

eg5. 设 $\mathbb{R}[x]_n$ 上的内积由 $(f|g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ 给出. 求 $\mathbb{R}[x]_2$ 得一组标准正交基。

解: 从 1, x 出发.

$$\varepsilon_1=\frac{1}{\|1\|}=\frac{1}{\sqrt{b-a}}$$

$$\varepsilon_2'=x_2-(x_2|\varepsilon_1)\varepsilon_1=x-\frac{b^2-a^2}{2b-2a}=x-\frac{a+b}{2}$$

$$\varepsilon_2=\frac{\varepsilon_2'}{\|\varepsilon_2'\|}=\frac{x-\frac{a+b}{2}}{\sqrt{\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2dx}}=\frac{2\sqrt{3}x-\sqrt{3}a-\sqrt{3}b}{(b-a)\sqrt{b-a}}.$$

于是, 以得一组单位正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

eg6. 设 $\vec{v_1},\cdots\vec{v_k}$ 是 n 维欧式空间中的非零向量. 证明: 如果 $\vec{v_1},\cdots\vec{v_k}$ 两两的夹角都是钝角, 则 $k\le n+1$.

证: 断言. 对任意 $s\in\{1,2,\cdots k-1\}$.

(i) $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_s}$ 线性无关.

(ii) 通过对 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_s}$ 实施 Gram-Schmidt 正交化得到的单位正向量 $\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_s$ 满足对任意 $i\in\{1,2,\cdots,s\}$ 和 $j\in\{s+1,\cdots,k\}$, $(\varepsilon_i|\vec{v_j})<0$.

断言的证明: ① 对 s 归纳. 当 $s=1$ 时, $\varepsilon_1=\vec{v_1}/\|\vec{v_1}\|$ 显然线性无关.

② 对 $\forall j\in\{2,3,\cdots,k\}$. $(\vec{v_1}|\vec{v_j})<0 \Longrightarrow (\varepsilon_1|\vec{v_j})<0$. 断言成立.

设在 $0\le i\le s-1$ 时成立.

令 $\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_{s-1}$ 是通过对 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_{s-1}}$ 实施 Gram-Schmidt 正交化得到的单位正交向量. 再令:

$$\varepsilon_s'=\vec{v_s}-(\vec{v_s}|\varepsilon_1)\varepsilon_1-\cdots-(\vec{v_s}|\varepsilon_{s-1})\varepsilon_{s-1}. \qquad (1).$$

设 $j\in\{s+1,\cdots,k\}$. 则

$$(\varepsilon_s'|\vec{v_j})=(\vec{v_s}|\vec{v_j})-(\vec{v_s}|\varepsilon_1)(\varepsilon_1|v_j)-\cdots-(\vec{v_s}|\varepsilon_{s-1})(\varepsilon_{s-1}|\vec{v_j}).$$

根据题目条件和假设

↓

$(\vec{v_s}|\vec{v_j})<0$, $(\vec{v_s}|\varepsilon_1)<0$, $(\varepsilon_1|\vec{v_j})<0$, $\cdots$ $(\vec{v_s}|\varepsilon_{s-1})<0$, $(\varepsilon_{s-1}|\vec{v_j})<0$.

比如: $(\vec{v_s}|\varepsilon_2) = \varepsilon_1 - (\vec{v_2}|\varepsilon_1)\cdot\varepsilon_1$

$$= (\vec{v_s}|\varepsilon_1) - (\vec{v_2}|\varepsilon_1)(\varepsilon_1|\vec{v_s})$$

$$= \underbrace{(\vec{v_s}|\varepsilon_1)}_{<0}\underbrace{(1-\underbrace{(\vec{v_2}|\underset{\frac{\vec{v_1}}{\|\vec{v_1}\|}}{\overset{\parallel}{\varepsilon_1}})}_{<0})}_{>0} \Longrightarrow <0.$$

于是 $(\varepsilon_s'|\vec{v_j})<0$. 特别地 $\varepsilon_s' \neq \vec{0}$.

根据 Gram-Schmidt 正交化, 我们有 $\varepsilon_s' \perp \varepsilon_i$, $i=1,2,\cdots s-1$.

于是, $\vec{\varepsilon_1}, \cdots \vec{\varepsilon_{s-1}}, \vec{\varepsilon_s}$ 线性无关.

(如果两两正交, 则它们线性无关).

我们得到 $\varepsilon_s' \notin \langle\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_{s-1}\rangle$

再根据 ε_s 的式子(1). $\vec{v_s} \notin \langle\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_{s-1}\rangle$.

根据 $\langle\vec{v_1}, \cdots \vec{v_{s-1}}\rangle = \langle\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_{s-1}\rangle$. $\Longrightarrow \vec{v_s} \notin \langle\vec{v_1}, \cdots \vec{v_{s-1}}\rangle$.

由此得出 $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_s}$ 线性无关.

令 $\varepsilon_s = \varepsilon_s'/\|\varepsilon_s'\|$. 由 $(\varepsilon_s'|\vec{v_j})<0$ 得出 $(\varepsilon_s|\vec{v_j})<0$, $j=s+1, s+2, \cdots, k$

断言成立.

假设 $k > n+1$. 由断言可知, $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n$ 是 V 的一组单位正交基. 于是, 存在

$\alpha_1, \cdots \alpha_n, \beta_1 \cdots \beta_n \in \mathbb{R}$ s.t.

$$\vec{v}_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i, \quad \vec{v}_{n+2} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varepsilon_j.$$

$\because (\vec{v}_{n+1}|\vec{v}_{n+2})<0$ 所以 $\alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n < 0$. (2)

另一方面, 由断言得第二个结论, 对任意 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$,

$(\vec{v}_{n+1}|\vec{e_i})<0 \Longrightarrow \alpha_i<0$ 和 $(\vec{v}_{n+2}|\vec{e_i})<0 \Rightarrow \beta_i<0$.

故 $\alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n > 0$ 与 (2) 矛盾.

假设不成立.

2. 正交补

1> $V=U\oplus U^{\perp}$

2>. $(U^{\perp})^{\perp}=U$.

3. 正交投影 $(\,U=W\oplus W^{\perp}$

1> $\pi_W: U\longrightarrow W$ $\pi_{W^{\perp}}: U\longrightarrow W^{\perp}$.

2>. $\|x-\pi_W(x)\|$ 称为x到W的距离 $d(x,W)$

$$d(x,W)^2=\frac{\det(G(\vec{x},\vec{w_1},\cdots\vec{w_\alpha}))}{\det(G(\vec{w_1},\cdots\vec{w_\alpha}))}.$$

4. 正交矩阵与正交等价

$$P^{-1}=P^{t}.$$