第十六次作业

在下述习题中, V 是有限维欧式空间, $\mathbb{R}^n$ 是标准欧式空间.

1. 设 $\mathbb{R}^4$ 是标准欧式空间, $\mathbf{w}_1=(1,0,1,0)^t$, $\mathbf{w}_2=(1,1,1,1)^t$. 计算 $\langle \mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\rangle^\perp$ 的一组单位正交基.

   解. 设 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的标准基, $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3+x_4\mathbf{e}_4$. 则 $\mathbf{x}\in W^\perp$ 当且仅当 $(\mathbf{w}_1|\mathbf{x})=(\mathbf{w}_2|\mathbf{x})=0$. 即

$$\begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$$

   于是

$$W^\perp=\langle (1,0,-1,0)^t,(0,1,0,-1)^t\rangle.$$

   由 *Gram-Schmidt* 正交化得

$$W^\perp=\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\rangle.$$

2. 设 $\mathbb{R}^5$ 中的子空间 W 是系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   的齐次线性方程组的解空间. 计算 $W^\perp$ 的一组单位正交基. 解. 直接计算得 $\mathrm{rank}(A)=2$. 故

$$W^\perp=\langle \vec{A}_1^t,\vec{A}_2^t\rangle.$$

   由 *Gram-Schmidt* 正交化得

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 子空间 W 的生成元是 $\mathbf{w}_1=(1,0,0)^t, \mathbf{w}_2=(1,2,1)^t$. 再设 $\mathbf{v}=(1,1,1)^t$. 计算 $\mathbf{v}$ 到 W 的距离和 $\mathbf{v}$ 与 W 的夹角(即 $\mathbf{v}$ 与其在 W 上正交投影的夹角). 解. 设 $\mathbf{v}$ 在 W 上的正交投影是 $\mathbf{x}=\alpha_1\mathbf{w}_1+\alpha_2\mathbf{w}_2$. 则

$$(\mathbf{v}-\mathbf{x})\perp W \iff \mathrm{G}(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\mathbf{v}|\mathbf{w}_1)\\ (\mathbf{v}|\mathbf{w}_2)\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}.$$

于是, $\alpha_1=2/5$, $\alpha_2=3/5$. 由此得出

$$\mathbf{x}=\frac{2}{5}\mathbf{w}_1+\frac{3}{5}\mathbf{w}_2=(1,6/5,3/5)^t.$$

令

$$\mathbf{y}=\mathbf{v}-\mathbf{x}=(0,-1/5,2/5)^t.$$

我们得到

$$\mathrm{d}(\mathbf{v},W)=\|\mathbf{y}\|=\sqrt{\frac{1}{5}}.$$

设 θ 是 $\mathbf{v}$ 与 W 的夹角. 则

$$\cos(\theta)=\frac{(\mathbf{v}|\mathbf{x})}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{x}\|}\Rightarrow \theta=\arccos\left(\sqrt{\frac{14}{15}}\right).$$

4. 设 U, W, W_1 和 W_2 是 V 的子空间. 证明:

(i) 如果 $U\subset W$, 则 $U^\perp\supset W^\perp$;

(ii) $(W_1+W_2)^\perp=W_1^\perp\cap W_2^\perp$;

(iii) (选做) $(W_1\cap W_2)^\perp=W_1^\perp+W_2^\perp$.

证明. *(i)* 设 $\mathbf{x}\in W^\perp$. 则 $\mathbf{x}$ 与 W 中的任意向量正交. 因为 $U\subset W$, 所以 $\mathbf{x}$ 与 U 中的任意向量正交. 由此得出, $W^\perp\subset U^\perp$.

(ii) 因为 $W_1\subset W_1+W_2$, 所以结论 *(i)* 蕴含 $W_1^\perp\supset(W_1+W_2)^\perp$. 同理, $W_2^\perp\supset(W_1+W_2)^\perp$. 故 $W_1^\perp\cap W_2^\perp\supset(W_1+W_2)^\perp$. 反之, 设 $\mathbf{y}\in W_1^\perp\cap W_2^\perp$. 对任意 $\mathbf{w}\in W_1+W_2$, 存在 $\mathbf{w}_1\in W_1$ 和 $\mathbf{w}_2\in W_2$ 使得 $\mathbf{w}=\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2$. 我们计算

$$(\mathbf{y}|\mathbf{w})=(\mathbf{y}|\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2)=(\mathbf{y}|\mathbf{w}_1)+(\mathbf{y}|\mathbf{w}_2)=0.$$

故 $\mathbf{y}\in(W_1+W_2)^\perp$. 由此得出, $W_1^\perp\cap W_2^\perp\subset(W_1+W_2)^\perp$. 综上所述 *(ii)* 成立.

(iii) 因为 $W_1\cap W_2\subset W_1$, 所以结论 *(i)* 蕴含

$$(W_1\cap W_2)^\perp\supset W_1^\perp.$$

同理

$$(W_1 \cap W_2)^\perp \supset W_2^\perp.$$

故

$$(W_1 \cap W_2)^\perp \supset W_1^\perp + W_2^\perp. \tag{1}$$

我们计算

$$\begin{aligned}
\dim(W_1^\perp + W_2^\perp) &= \dim(W_1^\perp) + \dim(W_2^\perp) - \dim(W_1^\perp \cap W_2^\perp) \quad \textit{(维数公式)} \\
&= \dim(W_1^\perp) + \dim(W_2^\perp) - \dim((W_1 + W_2)^\perp) \quad \textit{(结论 (ii))} \\
&= \dim(V) - \dim(W_1) + \dim(V) - \dim(W_2) - (\dim(V) - \dim(W_1 + W_2)) \\
&\quad \textit{(V 是子空间和其正交补的直和)} \\
&= \dim(V) - (\dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2)) \\
&= \dim(V) - \dim(W_1 \cap W_2) \quad \textit{(维数公式)} \\
&= \dim((W_1 \cap W_2)^\perp) \quad \textit{(V 是子空间和其正交补得直和)}.
\end{aligned}$$

上述结论与 (1) 蕴含 *(iii)*.

(iii) 的另一个证明. 我们利用 $(W^\perp)^\perp = W$. 由 *(ii)* 可知

$$(W_1^\perp + W_2^\perp)^\perp = (W_1^\perp)^\perp \cap (W_2^\perp)^\perp = W_1 \cap W_2.$$

对等式两侧再取正交补得到

$$W_1^\perp + W_2^\perp = (W_1 \cap W_2)^\perp.$$

5. 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$ 且 $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$ 的夹角都是 $\frac{\pi}{3}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $i \neq j$. 证明: $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ 线性无关. 证明. 不妨设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ 都是单位向量. 则

$$\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ 1/2 & 1 & \cdots & 1/2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{m \times m}.$$

根据上学期第三章第一讲例 *21.3* $\det(\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)) \neq 0$. 故 *Gram* 矩阵 $\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$ 满秩. 由此得出 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ 线性无关.

6. (复习) 设 F 是域 $A \in \mathrm{GL}_n(F)$. 证明: $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. 特别地, 当 A 是(斜)对称时, A^{-1} 也是(斜)对称的. *证明.* $A^{-1}A = E \Rightarrow (A^{-1}A)^t = E \Rightarrow A^t(A^{-1})^t = E$. 故 $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$. *(见上学期第二章第五讲命题 7.19).* 进而设 A 对称. 则 $A = A^t$. 故 $A^{-1} = (A^{-1})^t$. 同理, 可证斜对称情形.