第十七次习题课

一、作业中的问题及例子补充

1. 注：求给定向量的生成子空间的正交补空间中的单位正交基

   本质转化为解齐次线性方程组.

   Step 1. 求解空间的生成元（即一组基）

   Step 2. Gram-Schmidt 正交化.

2. 注意审题.

   此题中 W 看成系数矩阵为 A 的解空间.

   故： 对偶定理： $\mathrm{rank}(A)+\dim(W)=5$

   又由 $\mathbb{R}^5=W\oplus W^{\perp}$ $\dim(W^{\perp})+\dim(W)=5$.

   $\Longrightarrow \dim(W^{\perp})=\mathrm{rank}(A)=2$.

3. 距离与夹角的计算.

   解：设 $\vec{v}$ 在 W 上的正交投影是 $\vec{x}=a_1\vec{w_1}+a_2\vec{w_2}$.

   则 $(\vec{v}-\vec{x})\perp W \iff G(\vec{w_1},\vec{w_2})\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\vec{v}|\vec{w_1})\\(\vec{v}|\vec{w_2})\end{pmatrix}$

   $$\iff \begin{pmatrix}1&1\\1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}.$$

   于是 $a_1=2/5$， $a_2=3/5$、由此得出

   $$\vec{x}=\tfrac{2}{5}\vec{w_1}+\tfrac{3}{5}\vec{w_2}=(1,\ 6/5,\ 3/5)^t.$$

   $$d(\vec{v},W)=\|\vec{v}-\vec{x}\|=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

   设 θ 是 $\vec{v}$ 与 W 的夹角. 则

   $$\cos(\theta)=\frac{(\vec{v}|\vec{x})}{\|\vec{v}\|\ \|\vec{x}\|}\Longrightarrow \theta=\arccos\frac{\sqrt{210}}{15}.$$

(一) 关于投影的补充

定义1：设V是n维欧氏空间，$\vec{v}\in V$ 15 $\vec{0}$。定义

$$\pi_{\vec{v}}: V \longrightarrow V$$
$$\vec{x} \longmapsto \left(\vec{x} \,\middle|\, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{(\vec{x}|\vec{v})}{(\vec{v}|\vec{v})}\vec{v}.$$

称 $\pi_{\vec{v}}$ 是关于 $\vec{v}$ 的投影算子。

命题2. 设 $\dim(V)>1$. 则上述投影算子 $\pi_{\vec{v}}$ 有以下性质.

(i) $\pi_{\vec{v}}\in\mathcal{L}(V)$ 且 $\pi_{\vec{v}}^2=\pi_{\vec{v}}$；

(ii) 对任意 $\vec{x}\in V$，$(\vec{x}-\pi_{\vec{v}}(\vec{x}))\perp\vec{v}$.

(iii) $\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(\pi_{\vec{v}})=\{0,1\}$，$V^1=\langle\vec{v}\rangle$，$V^0=\{\vec{u}\in V\,|\,\vec{u}\perp\vec{v}\}$.

证明：(i) 注意到 $\vec{v}$ 是固定的向量。于是，内积的双线性蕴含 $\pi_{\vec{v}}$ 是线性的。

设 $\vec{x}\in V$. 则

$$\pi_{\vec{v}}^2(\vec{x})=\pi_{\vec{v}}\left(\frac{(\vec{x}|\vec{v})}{(\vec{v}|\vec{v})}\vec{v}\right)=\frac{(\vec{x}|\vec{v})}{(\vec{v}|\vec{v})}\pi_{\vec{v}}(\vec{v})=\frac{(\vec{x}|\vec{v})}{(\vec{v}|\vec{v})}\cdot\frac{(\vec{v}|\vec{v})}{(\vec{v}|\vec{v})}\vec{v}=\frac{(\vec{x}|\vec{v})}{(\vec{v}|\vec{v})}\vec{v}$$
$$=\pi_{\vec{v}}(\vec{x}).$$

(ii) 我们计算

$$\begin{aligned}(\vec{x}-\pi_{\vec{v}}(\vec{x})|\vec{v})&=(\vec{x}|\vec{v})-(\pi_{\vec{v}}(\vec{x})|\vec{v})\\&=(\vec{x}|\vec{v})-\frac{(\vec{x}|\vec{v})}{(\vec{v}|\vec{v})}(\vec{v}|\vec{v})\\&=(\vec{x}|\vec{v})-(\vec{x}|\vec{v})\\&=0\end{aligned}$$

(iii) 因为 $\pi_{\vec{v}}(\vec{v})\neq\vec{0}$，所以 $\pi_{\vec{v}}$ 不是零映射。

$\because \dim(V)>1$，$\therefore \exists\,\vec{w}\in V$ s.t. $\vec{w},\vec{v}$ 线性无关.

注意到

$$\|\pi_{\vec{v}}(\vec{w})\|=\left\|\left(\vec{w}\,\middle|\,\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right\|=\left|\left(\vec{w}\,\middle|\,\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)\right|\,\left\|\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right\|=\left|\left(\vec{w}\,\middle|\,\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)\right|<\|\vec{w}\|.$$

Cauchy-Bunyakovski inequ

故 $\pi_{\vec{v}}$ 非恒同算子.

$\therefore \mu_{\pi_{\vec{v}}}=t(t-1)$. 加强H-C. $\left\{\begin{array}{l}\mu_A\,|\,\chi_A.\\ \chi_A \text{ 在 } F[t] \text{ 中不可约因子都是 } \mu_A \text{ 的因子.}\end{array}\right.$

$$\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(\pi_{\vec{v}})=\{0,1\}.$$

设 $\vec{u}\in\langle\vec{v}\rangle$. 则存在 $\alpha\in\mathbb{R}$ s.t. $\vec{u}=\alpha\vec{v}$, 于是

$$\pi_{\vec{v}}(\vec{u})=\pi_{\vec{v}}(\alpha\vec{v})=\alpha\pi_{\vec{v}}(\vec{v})=\alpha\vec{v}=\vec{u} \implies \vec{u}\in V' \implies \langle\vec{v}\rangle\subset V'.$$

设 $\vec{w}\in V'$. 则 $\pi_{\vec{v}}(\vec{w})=\vec{w}$. 即

$$\vec{w}=\frac{(\vec{x}|\vec{v})}{(\vec{v}|\vec{v})}\vec{v} \Longrightarrow \vec{w}\in\langle\vec{v}\rangle \implies V'\subset\langle\vec{v}\rangle.$$

设 $\vec{x}\in V^{\circ}$. 则 $\pi_{\vec{v}}(\vec{x})=0$.

由 $\pi_{\vec{v}}$ 的定义可知 $(\vec{x}|\vec{v})=0$. 即 $\vec{x}\perp\vec{v}$.

回顾. $V=U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_k$.

$$\begin{aligned}\pi_i: V &\longrightarrow V\\ \vec{x} &\longmapsto \vec{x}_i\end{aligned}$$

命题1: (i) $\forall i,j\in\{1,2,\cdots,k\}$, $\pi_j\circ\pi_i$ 是零映射,

(ii) $\forall i\in\{1,2,\cdots,k\}$, $\pi_i\circ\pi_i=\pi_i$

(iii) $\pi_1+\pi_2+\cdots+\pi_k$ 恒同映射.

命题2: 正交性, 等方性, 完全性. 完全正交等方组.

eg.1: 设 $\vec{v}\in V\setminus\{\vec{0}\}$. 验证 $\pi_{\vec{v}}=\pi_{\langle\vec{v}\rangle}$

证明: 对任意的 $\vec{x}\in V$,

$$\pi_{\vec{v}}(\vec{x})=\frac{(\vec{x}|\vec{v})}{(\vec{v}|\vec{v})}\vec{v}\in\langle\vec{v}\rangle$$

令 $\vec{y}=\vec{x}-\pi_{\vec{v}}(\vec{x})$. 则

$$(\vec{y}|\vec{v})=(\vec{x}-\pi_{\vec{v}}(\vec{x})|\vec{v})=(\vec{x}|\vec{v})-\frac{(\vec{x}|\vec{v})}{(\vec{v}|\vec{v})}(\vec{v}|\vec{v})=0.$$

于是 $\vec{y}\perp\vec{v}$. 由此 $y\in\langle\vec{v}\rangle^{\perp}$.

故 $\vec{x}=\pi_{\vec{v}}(\vec{x})+\vec{y}$ 是 $\vec{x}$ 关于 $V=\langle\vec{v}\rangle\oplus\langle\vec{v}\rangle^{\perp}$ 的分解.

由此推出 $\pi_{\vec{v}}(\vec{x})=\pi_{\langle\vec{v}\rangle}(\vec{x})$.

命题2的补充 i) 关于线性空间直和分解的投影都是线性的, 于是, $\pi_{\vec{u}}$ 是线性算子.

设 $\pi_{W^{\perp}}$ 是从 V 到 $W^{\perp}$ 关于 $V=W\oplus W^{\perp}$ 的投影. 则 π_W 和 $\pi_{W^{\perp}}$ 构成完全正交等方组. 由等方性 $\pi_W^2=\pi_W$.

(ii) 由完全正交等方性知 $\pi_W+\pi_{W^\perp}=\mathcal{E}$.

故对 $\forall \vec{x}\in V$, $\vec{x}=\pi_W(\vec{x})+\pi_{W^\perp}(\vec{x})$.

于是, $\vec{x}-\pi_W(\vec{x})=\pi_{W^\perp}(\vec{x})\in W^\perp$.

(iii) 直和分解的投影定义可知, 对 $\forall \vec{x}\in W$, 我们有 $\pi_W(\vec{x})=\vec{x}$.

于是 $W\subset V'$. 对 $\forall \vec{x}\in W^\perp$, 我们有 $\pi_W(\vec{x})=\vec{0}$. 于是 $W^\perp=V^0$.

因为 $V=W\oplus W^\perp$ 且 $V'+V^0$ 是直和

$\therefore$ $V=V'\oplus V^0$ □.

$spec(\pi_W)=\{0,1\}$. $V'=W$, $V^0=W^\perp$.

(二) 向量到子空间的距离

定义3: 设 V 是 n 维欧氏空间, $W\subset V$ 是非平凡子空间, $\vec{x}\in V$. 则

$$\min_{\vec{w}\in W}\{\|\vec{x}-\vec{w}\|\}$$

称为 $\vec{x}$ 到 W 的距离, 记为 $d(\vec{x},W)$.

定理4. 利用上述定义记号, 我们有

$$d(\vec{x},W)=\|\vec{x}-\pi_W(\vec{x})\|.$$

证明: 对 $\forall\ \vec{w}\in W$,

$$\vec{x}-\vec{w}=\underbrace{\vec{x}-\pi_W(\vec{x})}_{\vec{y}}+\underbrace{\pi_W(\vec{x})-\vec{w}}_{\vec{z}}.$$

$y\in W^\perp$, $\because$ $\pi_W(\vec{x})$, $\vec{w}\in W$. $\therefore$ $\vec{z}\in W$. $y\perp\vec{z}$.

$$\|\vec{x}-\vec{w}\|^2=\|\vec{y}\|^2+\|\vec{z}\|^2\Longrightarrow\|\vec{x}-\vec{w}\|\geq\|y\|.$$

$\because$ $\pi_W(\vec{x})\in W$.

$\therefore$ $d(\vec{x},W)=\|\vec{y}\|$.

问题. 设 $W=\langle \vec{w}_1,\cdots,\vec{w}_d\rangle \subset V$, 其中 $0<d<\dim(V)$
且 $\vec{w}_1,\cdots,\vec{w}_d$ 线性无关. 给定 $\vec{x}\in V$, 求 $\pi_W(\vec{x})$.

Sol: 求 W 的一组单位正交基 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots\vec{\varepsilon}_d$ 则

$$\pi_W(\vec{x})=(\vec{x}|\vec{\varepsilon}_1)\vec{\varepsilon}_1+\cdots+(\vec{x}|\vec{\varepsilon}_d)\vec{\varepsilon}_d.$$

验证正确性. 把 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots\vec{\varepsilon}_d$ 扩充为 V 的一组单位正交基 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots\vec{\varepsilon}_d,\vec{\varepsilon}_{d+1},\cdots\vec{\varepsilon}_n$.
则 $\vec{\varepsilon}_{d+1},\cdots\vec{\varepsilon}_n\in W^\perp$ 且

$$\vec{x}=\underbrace{(\vec{x}|\vec{\varepsilon}_1)\vec{\varepsilon}_1+\cdots+(\vec{x}|\vec{\varepsilon}_d)\vec{\varepsilon}_d}_{\vec{u}}+\underbrace{(\vec{x}|\vec{\varepsilon}_{d+1})\vec{\varepsilon}_{d+1}+\cdots+(\vec{x}|\vec{\varepsilon}_n)\vec{\varepsilon}_n}_{\vec{v}}.$$

于是 $\vec{u}\in W$, $\vec{v}\in W^\perp$. 故 $\pi_W(\vec{x})=(\vec{x}|\vec{\varepsilon}_1)\vec{\varepsilon}_1+\cdots+(\vec{x}|\vec{\varepsilon}_d)\vec{\varepsilon}_d$.

eg2 设 $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{w}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

是标准欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中向量. 计算 $\pi_{\langle\vec{w}_1,\vec{w}_2\rangle}(\vec{x})$.

设 $W=\langle\vec{w}_1,\vec{w}_2\rangle$. 利用 Gram-Schmidt 正交化, 我们有

$$\vec{\varepsilon}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{w}_1,\qquad \vec{\varepsilon}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

是 W 的一组单位正交基. 于是, 所求的正交投影等于

$$\vec{u}=(\vec{x}|\vec{\varepsilon}_1)\vec{\varepsilon}_1+(\vec{x}|\vec{\varepsilon}_2)\vec{\varepsilon}_2=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

由此可知, $d(\vec{x},W)=\|\vec{x}-\vec{u}\|=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. 证明:

(i) 如果 $U \subset W$, 则 $U^\perp \supset W^\perp$;

证: 设 $\vec{x} \in W^\perp$. 则 $\vec{x}$ 与 W 中的任意向量正交.

$\because U \subset W$ $\therefore$ $\vec{x}$ 与 U 中的任意向量正交.

$\therefore W^\perp \subset U^\perp$.

(ii) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$;

证: $\because W_1 \subset W_1 + W_2$ $\therefore W_1^\perp \supset (W_1 + W_2)^\perp$

同理 $W_2^\perp \supset (W_1 + W_2)^\perp$.

$\Rightarrow W_1^\perp \cap W_2^\perp \supset (W_1 + W_2)^\perp$.

另一个方向的包含关系:

设 $\vec{y} \in W_1^\perp \cap W_2^\perp$. 对任意 $\vec{w} \in W_1 + W_2$. $\exists\, \vec{w_1} \in W$ 和 $\vec{w_2} \in W$

s.t. $\vec{w} = \vec{w_1} + \vec{w_2}$.

我们计算 $(\vec{y} | \vec{w}) = (\vec{y} | \vec{w_1} + \vec{w_2}) = (\vec{y} | \vec{w_1}) + (\vec{y} | \vec{w_2}) = 0$.

故 $\vec{y} \in (W_1 + W_2)^\perp$. 由此得出 $W_1^\perp \cap W_2^\perp \subset (W_1 + W_2)^\perp$.

(iii) $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

$\because W_1 \cap W_2 \subset W_1$ $\therefore (W_1 \cap W_2)^\perp \supset W_1^\perp$

同理 $(W_1 \cap W_2)^\perp \supset W_2^\perp$

$\Rightarrow (W_1 \cap W_2)^\perp \supset W_1^\perp + W_2^\perp$.

计算:
$$
\begin{aligned}
\dim(W_1^\perp + W_2^\perp) &= \dim(W_1^\perp) + \dim(W_2^\perp) - \dim(W_1^\perp \cap W_2^\perp) \\
&= \dim(W_1^\perp) + \dim(W_2^\perp) - \dim((W_1 + W_2)^\perp). \\
&= \dim(V) - \dim(W_1) + \dim(V) - \dim(W_2) \\
&\quad - (\dim(V) - \dim(W_1 + W_2))
\end{aligned}
$$

$[V = W_1 \oplus W_1^\perp = W_2 \oplus W_2^\perp = (W_1 + W_2) \oplus (W_1 + W_2)^\perp]$

$$
\begin{aligned}
&= \dim(V) - (\dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2)) \\
&= \dim(V) - \dim(W_1 \cap W_2) \\
&= \dim((W_1 \cap W_2)^\perp)
\end{aligned}
$$

(iii) 还可以通过 (ii) 来转化.

即和空间的垂空间为垂空间的交空间.

(ii) 的两边同时取正交补. 即 $W_1+W_2=(W_1^{\perp}\cap W_2^{\perp})^{\perp}$

结论即为 (iii).

具体证明: $(W_1^{\perp}+W_2^{\perp})^{\perp}=(W_1^{\perp})^{\perp}\cap(W_2^{\perp})^{\perp}$

$=W_1\cap W_2$

故 $W_1^{\perp}+W_2^{\perp}=(W_1\cap W_2)^{\perp}$

5. 证明: 为计算方便, 不妨设 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_m}$ 都是单位向量. 则

$$G(\vec{v_1},\cdots,\vec{v_m})=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

为 $\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$ 型行列式 且其取值不为0. 即 $\det(G)\neq 0$.

故 Gram 矩阵 $G(\vec{v_1},\cdots,\vec{v_m})$ 满秩. 由此得出 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_m}$ 线性无关。

6. 证: $A^{-1}A=E \Longrightarrow (A^{-1}A)^t=E$

$\Longrightarrow A^t(A^{-1})^t=E.$ 故 $(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}$. (*)

① $A=A^t$ 由(*) $A^{-1}=(A^{-1})^t$

② $-A=A^t$ 由(*) $(A^{-1})^t=(-A)^{-1}=-A^{-1}$

二、课程内容回顾

5. 正规算子与正规矩阵

1> 伴随算子和正规算子定义

eg. (斜)对称都是正规算子

2> 保内 $\Leftrightarrow$ 保长 $\Leftrightarrow$ 保距 $\Leftrightarrow$ 矩阵正交

3> 正规算子的不可分子空间分解:

a. W 是 $\mathcal{A}$-子空间 $\Rightarrow \begin{cases} W^{\perp}\text{是 } \mathcal{A}\text{-子空间} \\ \mathcal{A}|_W\text{正规算子} \end{cases}$

b. $\mathcal{A} = \underbrace{U_1 \oplus \cdots \oplus U_s}_{\text{二维 }\mathcal{A}\text{-不可分}} \oplus \underbrace{U_{s+1} \oplus \cdots \oplus U_n}_{\text{一维 }\mathcal{A}\text{-不可分}}$

4> 正规矩阵的标准型

6. 对称算子和对称矩阵