第十七次作业

在下述习题中, V 是有限维欧式空间, $\mathbb{R}^n$ 是标准欧式空间.

1. 设 $\mathbf{v}\in V$ 是单位向量. 令

$$\begin{array}{rccc}\mathcal{A}: & V & \longrightarrow & V \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{x}-2(\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v}\end{array}.$$

(i) 验证: $\mathcal{A}$ 是线性算子;

(ii) 证明: $\mathcal{A}$ 是正交算子;

(iii) 计算 $\mathcal{A}$ 的所有特征根.

解. *(i)* 设 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$. 则

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathbf{x}+\mathbf{y}-2(\mathbf{x}+\mathbf{y}|\mathbf{v})=\mathbf{x}-2(\mathbf{x}|\mathbf{v})+\mathbf{y}-2(\mathbf{y}|\mathbf{v})=\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{A}(\mathbf{y}).$$

设 $\alpha\in\mathbb{R}$. 则

$$\mathcal{A}(\alpha\mathbf{x})=\alpha\mathbf{x}-2(\alpha\mathbf{x}|\mathbf{v})=\alpha\mathbf{x}-2\alpha(\mathbf{x}|\mathbf{y})=\alpha(\mathbf{x}-2(\mathbf{x}|\mathbf{y}))=\alpha\mathcal{A}(\mathbf{x}).$$

故 $\mathcal{A}$ 是线性算子.

(ii) 只要验证 $\mathcal{A}$ 保长即可. 利用内积的双线性直接计算得

$$(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{x}))=(\mathbf{x}-2(\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v}|\mathbf{x}-2(\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v})=(\mathbf{x}|\mathbf{x})-4(\mathbf{x}|\mathbf{v})(\mathbf{x}|\mathbf{v})+4(\mathbf{x}|\mathbf{v})^2(\mathbf{v}|\mathbf{v}).$$

因为 $(\mathbf{v}|\mathbf{v})=1$, 所以上式蕴含

$$(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{x}))=(\mathbf{x}|\mathbf{x}).$$

(iii) 从 $\mathbf{v}$ 出发可扩充 V 的一组单位正交基 $\mathbf{v},\epsilon_2,\ldots,\epsilon_n$ (见第三章第二讲推论 *3.2*). 注意到

$$\mathcal{A}(\mathbf{v})=\mathbf{v}-2(\mathbf{v}|\mathbf{v})\mathbf{v}=\mathbf{v}-2\mathbf{v}=-\mathbf{v}.$$

于是, $\lambda_1=-1$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征根且 $\mathbf{v}$ 是其对应的特征向量. 对 $i\in\{2,3,\ldots,n\}$,

$$\mathcal{A}(\epsilon_i)=\epsilon_i-2(\epsilon_i|\mathbf{v})\mathbf{v}=\epsilon_i.\quad (\because\ (\epsilon_i|\mathbf{v})=0).$$

故 $\lambda_2=1$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征根且 $\epsilon_2,\ldots,\epsilon_n$ 是特征向量. 于是, $\mathcal{A}$ 在上述基底下的矩阵是

$$\mathrm{diag}(-1,1,\ldots,1).$$

由此得到 $\mathcal{A}$ 共有两个特征根, 它们是 ±1.

2. 设对称实矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

已知特征多项式 $\chi_A(t) = (t-10)(t-1)^2$.

(i) 计算正交矩阵 P 和对角矩阵 D 使得 $D = P^t AP$;

(ii) 计算 A^k, 其中 $k \in \mathbb{Z}$.

解*(i)* 矩阵 A 的特征根是 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = 10$. 直接计算得

$$E - A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

因为 $\mathrm{rank}(\lambda_1 E - A) = 1$, 所以 V^{λ_1} 是方程 $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$ 的解空间. 故

$$V_1^{\lambda} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{15}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{5} \\ -\frac{4\sqrt{5}}{15} \end{pmatrix} \rangle.$$

因为 A 可对角化, 所以 $\mathbb{R}^3 = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2}$. 因为 $V^{\lambda_1} \perp V^{\lambda_2}$, 所以 $V^{\lambda_2} = \left(V^{\lambda_1}\right)^{\perp}$. 故

$$V^{\lambda_2} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} . \rangle$$

于是, 矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{15}\sqrt{5} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

且 $D = P^t AP = \mathrm{diag}(1, 1, 10)$.

(ii) 因为 $A = PDP^t$, 所以直接计算得

$$A^k = PD^kP^t = P\mathrm{diag}(1,1,10^k)P^t = \begin{pmatrix} (8/9) + (1/9)10^k & -(2/9) + (2/9)10^k & (2/9) - (2/9)10^k \\ -(2/9) + (2/9)10^k & (5/9) + (4/9)10^k & (4/9) - (4/9)10^k \\ (2/9) - (2/9)10^k & (4/9) - (4/9)10^k & (5/9) + (4/9)10^k \end{pmatrix}.$$

3. 设 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 是正规矩阵，E 代表 n 阶单位阵. 证明: $E+A$ 也是正规矩阵.

证明. 利用 $A^tA=AA^t$ 直接计算得

$$(E+A)^t(E+A)=(E+A^t)(E+A)=E+A^t+A+A^tA=E+A+A^t+A^tA=(E+A)(E+A)^t.$$

故 $E+A$ 是正规矩阵.

4. 设 $A\in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 证明: 如果 A 是上三角矩阵, 则 A 是对角矩阵且对角线上的元素为 ± 1.

证明. 对 n 归纳. 当 $n=1$ 时, $A=(\pm 1)$. 结论显然成立. 设 $n>1$ 且 $n-1$ 时结论成立. 因为 A 是上三角矩阵, 所以

$$A=\begin{pmatrix} a & C \\ O_{(n-1)\times 1} & B \end{pmatrix},$$

其中 $a\in\mathbb{R}$, $B\in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ 是上三角矩阵, $C\in\mathbb{R}^{1\times(n-1)}$. 因为 A 是正交的, 所以它是正规的. 根据第三章第三讲引理 *5.11*,

$$A=\begin{pmatrix} a & O_{1\times(n-1)} \\ O_{(n-1)\times 1} & B \end{pmatrix}.$$

进而,

$$E=A^tA=\begin{pmatrix} a^2 & O_{1\times(n-1)} \\ O_{(n-1)\times 1} & B^tB \end{pmatrix}.$$

由此得出 $a^2=1$ 且 B 正交. 再利用归纳假设可直接得出 A 是对角矩阵且在对角线上的元素等于 ± 1.

5. 设 $A\in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 且 λ 是 A 的最大的特征值. 证明: 对任意向量 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$

$$(A\mathbf{x}|\mathbf{x})\le\lambda(\mathbf{x}|\mathbf{x})$$

且等号成立当且仅当 $\mathbf{x}\in V^{\lambda}$.

证明. 设

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \mathbf{x} & \mapsto & A\mathbf{x}. \end{array}$$

因为 A 是对称矩阵, 所以 $\mathcal{A}$ 是对称算子(第三章第三讲命题 *5.7*). 根据第三章第三讲定理 *6.1*, $\mathbb{R}^n$ 中有一组单位正交基

$$\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$$

使得 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵 $B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是 A 的所有特征根, 不必两两不同.

设 $\mathbf{x} = x_1\epsilon_1 + \cdots + x_n\epsilon_n$. 则

$$(A\mathbf{x}|\mathbf{x}) = (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) = (\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i x_i)\epsilon_i|\sum_{i=1}^{n} x_i\epsilon_i) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2.$$

利用 $\lambda = \max\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ 和上式得到

$$(A\mathbf{x}|\mathbf{x}) \leq \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda(\mathbf{x}|\mathbf{x}).$$

由上面计算可知

$$(A\mathbf{x}|\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}|\mathbf{x}) \iff (\lambda - \lambda_1)x_1^2 + \cdots + (\lambda - \lambda_n)x_n^2 = 0.$$

故 $x_i \neq 0$ 蕴含 $\lambda_i = \lambda$, 即 $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$, 换言之, $\mathbf{x} \in V^{\lambda}$.