第十八次作业

在下述习题中, V 是有限维欧式空间, $\mathbb{R}^n$ 是标准欧式空间.

1. 设 $n>1$. 在 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 中, 是否存在非对角矩阵 A 使得

   (i) A 既是对称的又是斜对称的?

   (ii) A 既是对称的又是正交的?

   (iii) A 既是斜对称的又是正交的?

   解. *(i)* 因为 $\mathbb{R}$ 的特征等于零, 所以这样的矩阵不存在.

   (ii) 存在. 例如二阶正交矩阵

   $$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix},$$

   其中 $\theta \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

   (iii) 存在. 例如二阶正交矩阵

   $$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 设 $\mathcal{A}$ 是 V 上的对称算子满足 $\mathcal{A}^2=\mathcal{E}$. 证明存在 $k,\ell \in \mathbb{N}$ 和 V 的某组单位正交基, 使得 $\mathcal{A}$ 在该基底下的矩阵是

   $$\begin{pmatrix} E_k & O \\ O & -E_\ell \end{pmatrix}.$$

   证明. 因为 $\mu_{\mathcal{A}}(t) | (t^2-1)$, 所以 $\mathcal{A}$ 的特征根是 1 或 -1. 由第三章第三讲定理 *6.1* 可知, $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是对角阵且对角线上的元素是 ± 1. 适当调整基中元素的顺序得到所需要的矩阵表示.

3. 设 A 是正定矩阵, B 是斜对称矩阵. 证明: $A+B$ 可逆.

   证明. 由第一章第六讲定理 *9.16 (ii)* 可知, 存在可逆矩阵 H 使得 $H^tAH=E$. 故

   $$H^t(A+B)H = H^tAH + H^tBH = E + H^tBH.$$

   令 $C=H^tBH$. 则 C 也是斜对称的. 我们只要证明 $E+C$ 可逆即可. 这结论见本周讲义例 *7.2*.

4. 设 $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 证明

(i) $\det(A) = \pm 1$.

(ii) 如果 $\det(A) = -1$. 则 $-1 \in \mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(A)$.

(iii) 如果 $\det(A) = 1$. 能否推出 $1 \in \mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(A)$? 并说明你的结论.

证明. *(i)* 因为 $AA^t = E$, 所以

$$\det(AA^t) = \det(A)\det(A^t) = \det(A)^2 = 1.$$

故 $\det(A) = \pm 1$.

(ii) 由第三章第四讲定理 *8.1* 可知 *(ii)*, 存在

$$\theta_1, \ldots, \theta_s \in (0, \pi) \quad 和 \quad \lambda_{2s+1}, \ldots, \lambda_n \in \{-1, 1\}$$

使得

$$A \sim_o M = \begin{pmatrix} N(\cos(\theta_1), \sin(\theta_1)) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\cos(\theta_s), \sin(\theta_s)) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

故 $\det(A) = \det(M) = \lambda_{2s+1} \cdots \lambda_n = -1$. 于是, $\lambda_{2s+1}, \ldots, \lambda_n$ 至少有一个是 -1. 因为 $\lambda_{2s+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(A)$, 所以 $-1 \in \mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(A)$.

(iii) 直接验证得 $-E_2$ 是正交矩阵, $\det(-E_2) = 1$ 且 $\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(-E_2) = \{-1\}$. 故 *(iii)* 中结论一般不成立.

5. 设 A, B 是正定矩阵. 证明: 如果 $A - B$ 正定, 则 $B^{-1} - A^{-1}$ 也正定.

证明. 根据第三章第四讲定理 *6.6*, 存在可逆矩阵 P 使得

$$A = P^t P \quad 和 \quad B = P^t \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) P,$$

其中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$. 则

$$A - B = P^t \mathrm{diag}(1 - \alpha_1, \ldots, 1 - \alpha_n) P. \tag{1}$$

因为 $A-B$ 正定, 所以 $\mathrm{diag}(1-\alpha_1,\ldots,1-\alpha_n)$ 正定. 故

$$1>\alpha_i>0,\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{2}$$

由 $(P^t)^{-1}=(P^{-1})^t$ 和 (1) 可知

$$B^{-1}-A^{-1}=P^{-1}\mathrm{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)^{-1}(P^{-1})^t-P^{-1}(P^{-1})^t=P^{-1}\underbrace{\mathrm{diag}(\alpha_1^{-1}-1,\ldots,\alpha_n^{-1}-1)}_{C}(P^{-1})^t.$$

由 (2) 可知, $\alpha_i^{-1}-1>0$, $i=1,\ldots,n$. 故 C 正定. 又因为 $B^{-1}-A^{-1}\sim_c C$, 所以 $B^{-1}-A^{-1}$ 正定.