第十九次习题课

(一) 知识点复习

第一学期的补充：多元多项式环；
一元多项式的无平方部分；
中国剩余定理。

一、空间与形式

1. 抽象的线性空间；子空间；子空间的直和；线性相关性；子空间生成元。
2. 线性映射及运算。
3. 商空间及自然的线性映射。
4. 极大线性无关组，基底与维数，基扩充定理，线性映射基本定理Ⅱ（★）。若干维数公式，利用线性映射的核证明矩阵秩的不等式。
5. 坐标变换，线性映射的矩阵表示
6. 对偶定理（★）
注：有可能与第三章所学的正交补的维数公式相结合。
7. 双线性型的定义和矩阵表示，对称与斜对称
注：对称化对角 $\begin{cases}\text{行列相伴}\\\text{降维}\end{cases}$
8. 双线性型 ⟶ 二次型，二次型与配极，规范基与规范型
注：利用配方法化规范型。
9. 惯性定理，(半)正定二次型，(半)正定矩阵。
注：判断正负定二次型的方法。
10. 二次曲线和曲面
11. 斜对称双线性型
12. 直和与投影
注：完全正交等方组的定义也可与第三章正交补知识相联系。

二、线性算子

1. 不同基底下线性映射的矩阵表示，对偶映射

2. 线性算子代数和矩阵相似

   注：相似不变量 & 以及关于不变量的补充.

3. 单个算子生成的子环

   1) 核核分解：$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，$p, q \in F[t]$ 互素．$(pq)(\mathcal{A}) = 0$.

   则 $V = \ker(p(\mathcal{A})) \oplus \ker(q(\mathcal{A}))$.

   2) 核像分解：$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$.

   $$V = \ker(\mathcal{A}) \oplus \operatorname{im}(\mathcal{A}) \Longleftrightarrow \operatorname{rank}(\mathcal{A}) = \operatorname{rank}(\mathcal{A}^2)$$

   其实上述还等价于 $\operatorname{im}(\mathcal{A}) = \operatorname{im}(\mathcal{A}^2)$

   $$\Longleftrightarrow \ker(\mathcal{A}) = \ker(\mathcal{A}^2)$$

   $$\Longleftrightarrow \dim(\ker(\mathcal{A})) = \dim(\ker(\mathcal{A}^2))$$

4. 算子和矩阵的极小多项式

   1) 零化多项式 $f(\mathcal{A}) = 0$.

   2) 极小多项式

   注 a. 引理 4.2 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，$f(t) \in F[t]$．$p(t)$ 是 $\mathcal{A}$ 的极小多项式.

   $$f(\mathcal{A}) = 0 \Longleftrightarrow p \mid f.$$

   b. 零、恒同、数乘、幂零算子（矩阵）极小多项式.

   c. $A, B \in M_n(F)$，$P \in GL_n(F)$ s.t $B = P^{-1}AP$

   设 $f \in F[t]$．则 $f(B) = P^{-1} f(A) P$.

   特别地：$A \sim_s B \Longleftrightarrow f(A) \sim_s f(B)$.

   d. $A \sim_s B$，$\mu_A = \mu_B$.

   e. $\dim(F[\mathcal{A}]) = \deg(\mu_{\mathcal{A}})$ 且 $\mathcal{A}$ 可逆 $\Longleftrightarrow \mu_{\mathcal{A}}(0) \neq 0$.

5. 不变子空间

   1) 定义：U 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间：$\forall \vec{v} \in U$．$\mathcal{A}(\vec{v}) \in U$.

2> U是$\mathscr{A}$的d维不变子空间 $0<d<n$.

$\mathscr{A}$在某组基下矩阵 $\mathscr{A}=\begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$ $B\in M_d$

$\mu_{\mathscr{A}_U} \mid \mu_{\mathscr{A}}$. $\mu_B \mid \mu_A$. $\mu_D \mid \mu_A$.

3> $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$. $\ker(\mathscr{B})$, $\mathrm{im}(\mathscr{B})$都是$\mathscr{A}$-不变.

4>. $f\in F[t]$. $\ker(f(\mathscr{A}))$, $\mathrm{im}(f(\mathscr{A}))$. - — — .

5> U_1+U_2, $U_1\cap U_2$

6> $V=\underset{\sim}{U_1}\oplus\underset{\sim}{U_2}$ $A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$.

$\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_{d_1}$ $\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_{d_2}$.

lcm

$\mu_{\mathscr{A}}=(\mu_{\mathscr{A}_1},\mu_{\mathscr{A}_2})$

7> 核像分解II: $V=\ker(\mathscr{A})\oplus\mathrm{im}(\mathscr{A}) \Longleftrightarrow t^2\nmid\mu_{\mathscr{A}}$.

6. 不可分子空间

定义:

$n=\dim(V)$, $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$可对角化 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$有n个线性无关特征向量.

$\Uparrow$

从$\langle\vec{v}\rangle$是$\mathcal{A}$-子空间定义特征向量

$\Downarrow$

$\exists\lambda$ s.t. $\mathcal{A}(\vec{v})=\lambda\vec{v}$ 定义特征根 $\xRightarrow{\text{转化}}$ $(\lambda E-A)\vec{x}=0$ 定义特征多项式$\chi_{\mathcal{A}}$及谱$\mathrm{spec}(\mathcal{A})$

$\mathrm{spec}(\mathcal{A})$: 某数域

解空间即为特征子空间

$\Downarrow$

$V^{\lambda}=\{\vec{x}\in V\mid\mathcal{A}(\vec{x})=\lambda\vec{x}\}$定义特征子空间（且$V^{\lambda}$是$\mathcal{A}$-不变）

$\Downarrow$

$\mathrm{spec}_F(\mathcal{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_k\}$

$\mathcal{A}$可对角化 $\Longleftrightarrow$ $V=V^{\lambda_1}\oplus V^{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V^{\lambda_k}$.

$\Downarrow$

维数公式 $\dim(V)=\dim(V^{\lambda_1})+\cdots+\dim(V^{\lambda_k})$

$\mathcal{A}$可对角化 $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases}\chi_{\mathcal{A}}\text{所有根都在}F.\\ \text{几何重数}=\text{代数重数}.\end{cases}$

$\Uparrow$

（$\chi_{\mathcal{A}}$）$\Downarrow$（与H-C加强版）.

$\mu_{\mathcal{A}}$可分解为两两互素一次因子之积.

9. 循环子空间

1> 定义：$F[\mathscr{A}]\cdot\vec{v}$. 循环算子 循环向量.

a. $F[\mathscr{A}]\cdot\vec{v}=\{p(\mathscr{A})\cdot\vec{v}\mid p(t)\in F[t]\}$

b. $F[\mathscr{A}]\cdot\vec{v}$ 是 $\mathscr{A}$ 不变

c. $d=\deg(\mu_{\mathscr{A},\vec{v}})$，$\vec{v},\cdots\mathscr{A}^{d-1}(\vec{v})$ 是 $F[\mathscr{A}]\cdot\vec{v}$ 的一组基. $d=\dim(F[\mathscr{A}]\cdot\vec{v})$.

2>. V 是 $\mathscr{A}$-循环. 则 $\mu_{\mathscr{A}}=\chi_{\mathscr{A}}$.

3>. H-C: $\chi_{\mathscr{A}}(\mathscr{A})=0$. $\mu_{\mathscr{A}}\mid\chi_{\mathscr{A}}$.

4> $\mathrm{spec}_F(\mathscr{A})$ 与 $\mu_{\mathscr{A}}$ 在 F 中根的集合相同.

5>. V 是 $\mathscr{A}$-循环 $\Longleftrightarrow\deg(\mu_{\mathscr{A}})=\dim V$.

10. 循环子空间分解

1> $\exists\,\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_\ell\in V\setminus\{\vec{0}\}$ s.t.

$$V=(F[\mathscr{A}]\cdot\vec{v}_1)\oplus\cdots\oplus(F[\mathscr{A}]\cdot\vec{v}_\ell).$$

2> H-C 加强版 $\begin{cases}\mu_{\mathscr{A}}\mid\chi_{\mathscr{A}}\\ \chi_{\mathscr{A}}\text{ 在 }F[t]\text{ 中不可约因子都是 }\mu_{\mathscr{A}}\text{ 因子}.\end{cases}$

3> U 不可分 $\Longleftrightarrow\begin{cases}U\text{ 是 }\mathscr{A}\text{-循环}\\ \mu_{\mathscr{A}_U}\text{ 是 }F[t]\text{ 中某个不可约多项式的幂次}.\end{cases}$

4>. $\exists$ $\mathscr{A}$-不可分 $W_1,\cdots W_k$ s.t $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$ 且 W_k $\mathscr{A}$-循环. $\mu_{\mathscr{A}_{W_i}}$ 是不可约.

$\Downarrow$

11. Jordan 标准型（复数域）

1>. $\mu_{\mathscr{A}}=(t-\lambda)^n\Longleftrightarrow V$ 不可分.

2> $\mathrm{rank}(J_n(\lambda))=n\ (\lambda\neq0)$; $\mathrm{rank}(J_n(0))=n-1$; $J_n(\lambda)=J_n(0)+\lambda E_n$;

特征多项式和极小多项式均为 $(t-\lambda)^n$; 唯一特征根 λ; 可对角化 $n=1$.

3> 分块之后的推论: $\mathrm{rank}(J_A)=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{rank}(J_{d_i}(\lambda_i))$;

J_A 的极小多项式 $\mathrm{lcm}((t-\lambda_1)^{d_1},\cdots,(t-\lambda_k)^{d_k})$, 特征: $(t-\lambda_1)^{d_1}\cdots(t-\lambda_k)^{d_k}$;

代数重数 λ 出现次数, 几何重数 关于 λ 的 Jordan 块;

极小多项式的重数 $=$ 关于 λ Jordan 块最大阶数;

可对角化 $d_1=\cdots=d_k=1$。

注: 除会计算外, 要把握整体框架.

12. 初等因子组

1) 定义.

a. $F=\mathbb{C}$, 初等因子组唯一确定 Jordan标准型.

b. 初等因子组可以通过计算若干矩阵的秩得到.

2) V是$\mathcal{A}$-循环. 设 $\mu_{\mathcal{A}}=p^m$,

$$\operatorname{rank}(p(\mathcal{A})^k)=\begin{cases}(m-k)\deg(p), & 0\le k\le m\\ 0, & k>m\end{cases}$$

只有一个不可约因子.

$$n_l=\frac{1}{d}(r_{l-1}+r_{l+1}-2r_l)$$

$$N(i,l)=\frac{1}{d_i}(R(i,l-1)+R(i,l+1)-2R(i,l)).$$ s个不可约因子.

3). Jordan标准型由初等因子组唯一确定.

13. 矩阵相似的判定.

1). $A\sim_s B \Rightarrow f(A)\sim_s f(B)$ 且 $\operatorname{rank}(f(A))=\operatorname{rank}(f(B))$.

$A^k=P^{-1}B^kP$. $\forall k$都成立.

2). $A\sim_s B \Leftrightarrow$

a. 有共同初等因子组.

b. $\begin{cases}\chi_{\mathcal{A}}=\chi_B \text{或} \mu_{\mathcal{A}}=\mu_B.\\ \operatorname{rank}(p_j(A)^i)=\operatorname{rank}(p_j(B)^i)\end{cases}$ p_j为不可约因子.

c. $\operatorname{rank}(f(A))=\operatorname{rank}(f(B))$.

三. 内积空间

1. 欧氏空间

1) 内积: 双线, 对称, 正定.

2) Gram矩阵

! 线性相关 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(G(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_m))<m$

3). $\sqrt{(\vec{x}|\vec{x})}=\|\vec{x}\|$ $\quad \|\vec{x}-\vec{y}\|$ $\quad \arccos\left(\frac{(\vec{x}|\vec{y})}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}\right)$.

向量所组成的行列式的几何意义: $\begin{cases}\text{二维: 有向面积.}\\ \text{三维: 有向体积.}\end{cases}$

4) Gram-Schmidt 正交化.

2. 正交补.

1) 定义

2). $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_d}$ 为V中单位正交向量. 则可扩充为V的一组单位正交基.

3. 正交投影

1) $V=W\oplus W^{\perp}$

π_W 与 $\pi_{W^{\perp}}$ 为完全正交等方组.

2). 定义:

3) 距离 $d(\vec{x},W)$

4. 正交矩阵与正交等价

1) $P^t=P^{-1}$; $\det(P)=\pm1$

2) $A\sim_o B$.

5. 正规算子与正规矩阵.

1). 伴随算子.

$$\begin{matrix} A & 、 & A^t. \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathscr{A} & & \mathscr{A}^* \end{matrix}$$

2) 正规算子. $\mathscr{A}\mathscr{A}^*=\mathscr{A}^*\mathscr{A}$

eg. 对称, 斜对阵.

3) $(\vec{x}|\vec{y})=(\mathscr{A}(\vec{x})|\mathscr{A}(\vec{y}))$

$\|\vec{x}\|=\|\mathscr{A}(\vec{x})\|$

$\|\vec{x}-\vec{y}\|=\|\mathscr{A}(\vec{x})-\mathscr{A}(\vec{y})\|$

$A\in O_n(\mathbb{R})$.

4). $A=\begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$ 正规, 则 $C=O$.

5) W 是 $\mathscr{A}$-子空间 $\Rightarrow$ $W^{\perp}$ 是 $\mathscr{A}$-子空间

$\mathscr{A}|_W$ 正规算子.

6>. $\mathcal{A}$在某组基下矩阵

$$\begin{bmatrix} N(\alpha_1,\beta_1) & & & & & & \\ & N(\alpha_2,\beta_2) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & N(\alpha_s,\beta_s) & & & \\ & & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

若A正规，则A正交相似于上述矩阵.

6. 对称算子和对称矩阵.

1>. $A\in SM_n(\mathbb{R})$. $A\sim_o \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$. $(\beta_i=0)$.

2>. 求 $P\in O_n$.

特征根 $\longrightarrow$ 特征子空间(基) $\longrightarrow$ Gram-Schmidt 正交化.

3>. A正定 $\Longleftrightarrow$ A的特征根全为正. (对应的正定算子也有相似结论).

4> $A,B\in SM_n$ A正定 $\exists\ P$, $P^tAP=E$ (惯性定理) P^tBP 对角.

7. 斜对称算子和斜对称矩阵.

1>. $A\in SSM_n(\mathbb{R})$

$$A\sim_o \begin{bmatrix} N(0,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(0,\beta_s) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$\alpha_i=0$, $\lambda_{2s+1}=\cdots=\lambda_n=0$.

8. 正交算子和正交矩阵.

$$A\sim_o \begin{bmatrix} N(\cos(\theta_1),\sin(\theta_1)) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & N(\cos(\theta_s),\sin(\theta_s)) & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$\lambda_i=\pm1$.

9. 谱分解、平方根、极化分解

10. Hermitian (欧氏推广 $\longrightarrow$) 半双线性型

11. U矩阵与U等价 12. (5) 13. (5) 14. (8).

补充：$A,B\in SM_n(\mathbb{R})$ 半正定，$\exists\ P$ s.t $P^tAP=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和 P^tBP 对角阵.

(二) 作业中的问题

1. (ii) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\mu_{\mathcal{A}} \mid t^2-1$

3. A正定，∃ $H^tAH=E$.

转化为 $E+\underbrace{H^tBH}_{\text{斜对称}}$ 即可逆

4. (ii) $\det(A)=-1 \Rightarrow \lambda_{s+1} \cdots \lambda_n$ 中至少有一个 -1

(iii). 举反例 $-E_2$.

5. 任意一个$\underbrace{\text{矩阵}}_{\text{正定}}$可写成可逆阵 × 其转置. $(A=P^tEP)$. 同时 $B=P^t\operatorname{diag}(a_1,\cdots,a_n)P$.

若 A, B 均半正定，则也可找到这样的P.