期末复习

第二章

1. 极小多项式. $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$.

$\mu_{\mathcal{A}}$ 是 $\mathcal{A}$ 的零化多项式中首一的次数最小的多项式.

性质: (1) $f(\mathcal{A})=0 \Leftrightarrow \mu_{\mathcal{A}}(t)\mid f(t)$.

(2) $\mathcal{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow \mu_{\mathcal{A}}(0)\neq 0$.

(3) $\dim(F[\mathcal{A}])=\deg(\mu_{\mathcal{A}})$

(4) 若 $A=\mathrm{diag}(A_1,A_2,\cdots,A_s)$. 则 $\mu_A=\mathrm{lcm}(\mu_{A_1},\cdots,\mu_{A_s})$

eg: (1) $\deg(\mu_{\mathcal{A}})=1 \Leftrightarrow \mathcal{A}=\lambda\mathcal{E}$. $\lambda\in F$.

(2) ~~deg~~ $\mu_{\mathcal{A}}(t)=t^k$. $k\geq 1 \Leftrightarrow \mathcal{A}$ 是幂零算子.

2. 不变子空间

Def: $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. $U\subseteq V$ 子空间. 若 $\mathcal{A}(U)\subseteq U$ i.e. $\forall\vec{u}\in U$, $\mathcal{A}(\vec{u})\in U$.

则称 U 是 $\mathcal{A}$-子空间.

prop: U 是 $\mathcal{A}$-子空间. 基底 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_k$. 可扩充成 V 一组基 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_k,\vec{e}_{k+1},\cdots,\vec{e}_n$

则 $\mathcal{A}$ 在该基下矩阵是 $\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ 0 & A_3\end{pmatrix}$.

若 $\langle\vec{e}_{k+1},\cdots,\vec{e}_n\rangle$ 也是 $\mathcal{A}$-子空间, 则矩阵为 $\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_3\end{pmatrix}$

prop: (1) $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L}(V)$. $\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}$ 则 $\ker(\mathcal{B})$ 和 $\mathrm{im}(\mathcal{B})$ 是 $\mathcal{A}$-子空间

(2) $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. $f\in F[t]$, 则 $\ker(f(\mathcal{A}))$ 和 $\mathrm{im}(f(\mathcal{A}))$ 是 $\mathcal{A}$-子空间

(3) U_1,U_2 是 $\mathcal{A}$-子空间 则 U_1+U_2 和 $U_1\cap U_2$ 也是 $\mathcal{A}$-子空间

Thm: $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. $V=U_1\oplus\cdots\oplus U_k$. U_i 非平凡 $\mathcal{A}$-子空间 基 Z_i.

则 $\mathcal{A}$ 在 V 基 $Z_1\cup\cdots\cup Z_k$ 下矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & & & 0\\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k\end{pmatrix}$$

A_i 是 $\mathcal{A}|_{U_i}$ 在 Z_i 下矩阵.

$\mu_{\mathcal{A}}=\mathrm{lcm}(\mu_{\mathcal{A}|_{U_1}},\cdots,\mu_{\mathcal{A}|_{U_k}})$

3. 不可分子空间.

Def: $\mathcal{U}$是$\mathcal{A}$-子空间. $\mathcal{U}$不能写成两个非零的$\mathcal{A}$-子空间的直和, 则称$\mathcal{U}$是$\mathcal{A}$-不可分的.

Prop: $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_s$. V_i是$\mathcal{A}$不可分子空间.

4. 特征向量. 特征值(根). 特征多项式. 特征子空间.

Def: (1) $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 若$\vec{v}\in V\setminus\{\vec{0}\}$ s.t. $\mathcal{A}(\vec{v})=\lambda\vec{v}$ ($\exists\lambda\in F$). 则称$\vec{v}$为$\mathcal{A}$特征向量, λ为对应的特征值 (可以为0). Note: $\vec{v}$是特征向量 $\Leftrightarrow$ $\langle\vec{v}\rangle$是$\mathcal{A}$-子空间.

(2) $V^{\lambda}:=\{\vec{v}\in V\mid\mathcal{A}\vec{v}=\lambda\vec{v}\}=\ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})$ 称为关于λ的特征子空间.

Note: V^{λ}是$\mathcal{A}$-子空间. 且$\mathcal{A}|_{V^{\lambda}}=\lambda\mathcal{E}$.

(3) $\chi_{\mathcal{A}}=|tE-A|$ (A为$\mathcal{A}$在某组基下矩阵. $\because\chi_A$相似不变 故可记为$\chi_{\mathcal{A}}$)

λ是A特征根 $\Leftrightarrow$ $\chi_A(\lambda)=0$.

相似不变量: 秩. 行列式. 迹. 极小多项式. 特征多项式. 特征根.

Note: 特征向量不是. 但相差一个可逆矩阵

eg: 由 $A\in M_n(\mathbb{C})$, $A\sim_s$ 上三角矩阵.

Prop: (1) $A\in M_n(F)$. $\chi_A\overset{\text{记}}{=}t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t+a_0$. $a_i\in F$.

则 $a_{n-1}=-tr(A)$. $a_0=(-1)^n\det(A)$. A可逆 $\Leftrightarrow$ 0不是A的特征根.

(2) $A\in M_n(F)$是如下分块上三角

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & & & *\\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k\end{pmatrix}$$

则 $\chi_A=\chi_{A_1}\cdots\chi_{A_k}$.

5. 对角化. ($\mathcal{A}$在V某组基下的矩阵是对角阵 or. $A\sim_s$对角阵)

Thm: $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$可对角化.

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$有n个线性无关的特征向量. Note: (χ_A在F中有n个不同根, 则$\mathcal{A}$可对角化)

$\Longleftrightarrow$ $V=V^{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V^{\lambda_k}$. $spec_F(\mathcal{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_k\}$

$\Longleftrightarrow$ $\dim V=\dim(V^{\lambda_1})+\cdots+\dim(V^{\lambda_k})$. $spec_F(\mathcal{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_k\}$

$\Longleftrightarrow$ $\chi_A(t)$在$F[t]$中可分解成一次因子之积且$\forall\lambda\in spec_F(\mathcal{A})$. λ几何重数$=$代数重数

$\Longleftrightarrow$ $\mu_A(t)$在$F[t]$中可分解成两两互素一次因子之积.

Note: (1) $(t-\lambda)$在χ_A中重数 $\to$ 代数重数 $\geq$ 几何重数 $=\dim V^{\lambda}$.

~~Prop~~ (2) $V=V^{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V^{\lambda_k}$. $spec_F(\mathcal{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_k\}$

基 $\downarrow$ $\quad\downarrow$

$\vec{e}_{11},\cdots,\vec{e}_{1d_1},\cdots\cdots,\vec{e}_{k1},\cdots,\vec{e}_{k,d_k}$

则$\mathcal{A}$在上述基底下矩阵是 $\begin{pmatrix}\lambda_1E_{d_1} & & & 0\\ & \lambda_2E_{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_kE_{d_k}\end{pmatrix}$

6. 循环子空间.

$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\vec{v}\in V$. $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}=\langle\vec{v},\mathcal{A}(\vec{v}),\mathcal{A}^2(\vec{v}),\cdots\rangle$

Prop: (1) $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}=\{p(\mathcal{A})(\vec{v})\mid p(t)\in F[t]\}$

(2) $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$是$\mathcal{A}$-不变的

(3) $d=\deg(\mu_{\mathcal{A},\vec{v}})$, 则$\vec{v},\mathcal{A}(\vec{v}),\cdots,\mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$是$F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$基 且

$d=\dim(F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v})$.

~~Thm~~ Def: $V=F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$. 称$\mathcal{A}$是$V$上循环算子, $\vec{v}$是V中循环向量.

V是关于$\mathcal{A},\vec{v}$的循环空间.

Thm: $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. $\mathcal{A}$是循环算子 i.e. V是$\mathcal{A}$-循环空间 $\Longleftrightarrow$ $\deg(\mu_A)=\overset{\deg(\chi_A)}{\overset{\shortparallel}{\dim V}}$

Thm：(Hamilton - Cayley Thm 加强版)

$A \in \mathcal{L}(V)$，则 ① $\mu_A(t) \mid \chi_A(t)$

② $\chi_A(t)$ 在 $F[t]$ 中的不可约因子都是 $\mu_A(t)$ 的因子.

7. Jordan 标准型（复数域）

Thm：$A \in M_n(\mathbb{C})$，$A \sim_s J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{d_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$

J_A：不记序下唯一.

其中 $d_i \in \mathbb{Z}^+$，$\lambda_i \in \mathbb{C}$ 不必两两不同.

prop：(1) $\operatorname{rank}(J_A) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{rank}(J_{d_i}(\lambda_i))$

(2) $\mu_A = \mu_{J_A} = \operatorname{lcm}((t-\lambda_1)^{d_1}, \ldots, (t-\lambda_k)^{d_k})$

$\chi_A = \chi_{J_A} = (t-\lambda_1)^{d_1} \cdots (t-\lambda_k)^{d_k}$.

(3) $\lambda \in \operatorname{spec}_{\mathbb{C}}(A)$，$J_A$ 中至少有一个关于 λ 的 Jordan 块.

(4). λ 代数重数 = λ 在 J_A 主对角线上出现次数.

λ 几何重数 = 关于 λ 的 Jordan 块在 J_A 中出现的次数.

λ 在 μ_A 中重数 = J_A 中关于 λ 的 Jordan 块出现最大阶数.

(5). A 可对角 $\Leftrightarrow d_1 = \cdots = d_k = 1$.

会计算：低阶用上述性质.

高阶用初等因子组.

8. 矩阵相似判定. $A \sim_s B \Rightarrow f(A) \sim_s f(B)$. $f \in F[t]$

判别法 I－III.

第三章

1. 欧氏空间 $(F=\mathbb{R})$

Def：线性空间 + 内积

V上对称双线性型，对应的二次型是正定的（双线性，对称性，正定性）

Gram矩阵：$G(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_m)=\left((\vec{v}_i|\vec{v}_j)\right)_{m\times m}$.

Prop：(1) $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(G(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_m))<m$.

(2) $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_m\in V$. 设 $\vec{x}=\alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_m\vec{v}_m$，$\vec{y}=\beta_1\vec{v}_1+\cdots+\beta_m\vec{v}_m$，则

$$(\vec{x}|\vec{y})=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)G(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_m)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$$

(3) $G(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_m)=E \Leftrightarrow \vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_m$ 是单位正交向量.

Def：长度：$\|\vec{x}\|=\sqrt{(\vec{x}|\vec{x})}$　距离：$\|\vec{x}-\vec{y}\|$.　角度：$\theta=\arccos\left(\frac{(\vec{x}|\vec{y})}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}\right)$

$\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n\in\mathbb{R}^n$（线无）. 由 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n$ 生成的平行多面体的体积为 $|\det(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n)|$

G-S正交化：$\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_k\in V$ 线性无关，则∃两两正交的单位向量 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_k$ s.t.

$$\langle\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_i\rangle=\langle\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_i\rangle.\quad i=1,\cdots,k.$$

特别地，V有单位正交基.

Note：① $\vec{x}\perp\vec{x}\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{0}$.

② $\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_k\in V$ is 两两正交 ⟹ 它们线性无关.

③ $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_d$ 是V中的单位正交向量，则 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_d$ 可扩充为V的一组单位正交基.

设 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 是V单位正交基. ~~~~且 $\vec{x},\vec{y}\in V$. $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+\cdots+x_n\vec{e}_n$
$\vec{y}=y_1\vec{e}_1+\cdots+y_n\vec{e}_n$

则 ① $(\vec{x}|\vec{y})=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$

② $(\vec{x}|\vec{e}_i)=x_i$.　$i=1,2,\cdots,n$.

2. 正交补.

$U_1 \perp U_2$: $\forall \vec{u_1} \in U_1$, $\forall \vec{u_2} \in U_2$. $\vec{u_1} \perp \vec{u_2}$.

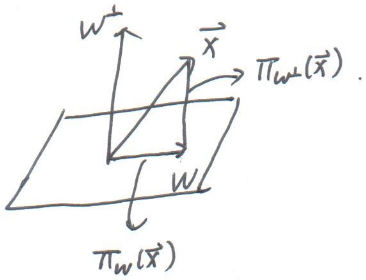
Thm: $U^{\perp} = \{\vec{x} \in V \mid \vec{x} \perp U\}$. 则

① $U^{\perp}$是子空间且 $U \perp U^{\perp}$

② $V = U \oplus U^{\perp}$

③ $(U^{\perp})^{\perp} = U$.

3. 正交投影.



$\vec{x} \in V$, $W = \langle \vec{w_1}, \dots, \vec{w_d} \rangle$ 其中$\vec{w_1}, \dots, \vec{w_d}$是$W$一组基.

求 $\pi_W(\vec{x})$, $d(\vec{x}, W)$.

解. 设 $\vec{y} = \alpha_1 \vec{w_1} + \dots + \alpha_d \vec{w_d} = \pi_W(\vec{x})$.

$$G(\vec{w_1}, \dots, \vec{w_d}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{x} \mid \vec{w_1}) \\ \vdots \\ (\vec{x} \mid \vec{w_d}) \end{pmatrix}.$$

$|G(\vec{w_1}, \dots, \vec{w_d})| \neq 0$ ($\because \vec{w_1}, \dots, \vec{w_d}$ 线无) $\therefore$ 上述方程组唯一

$$d(\vec{x}, W)^2 = \|\vec{x}\|^2 - \|\alpha_1 \vec{w_1} + \dots + \alpha_d \vec{w_d}\|^2$$
$$= (\vec{x} \mid \vec{x}) - (\alpha_1, \dots, \alpha_d) G(\vec{w_1}, \dots, \vec{w_d}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}$$

Thm: $\vec{x} \in V$. W子空间. $\vec{w_1}, \dots, \vec{w_d}$是$W$一组基. 则

$$d(\vec{x}, W)^2 = \frac{\det(G(\vec{x}, \vec{w_1}, \dots, \vec{w_d}))}{\det(G(\vec{w_1}, \dots, \vec{w_d}))}$$

4. 正交矩阵与正交变换.

Def: $PP^t = E$ or $P^t = P^{-1}$. 其中 $P \in GL_n(\mathbb{R})$. 称P是正交矩阵. 集合记为 $O_n(\mathbb{R})$.

eg: $P \in O_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists \theta$ s.t.

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ or } P = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

prop：V 基 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 和 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n$ 且 $(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n)=(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)P$. $P\in GL_n(\mathbb{R})$.

设 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 单位正交基. 则 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n$ 是单位正交基 $\Leftrightarrow P\in O_n(\mathbb{R})$

Def：$A\sim_o B$：$\exists P\in O_n(\mathbb{R})$ s.t. $B=P^{-1}AP$.

5. 正规算子和正规矩阵

$\mathcal{A}$ 正规算子 $(\mathcal{A}\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^*\mathcal{A})$.　　　　A 正规矩阵 $(AA^t=A^tA)$

$\begin{cases}\text{对称算子 } (\mathcal{A}^*=\mathcal{A}) \\ \text{斜对称算子 } (\mathcal{A}^*=-\mathcal{A}) \\ \text{正交算子 (保内/长/距) } (\vec{x}|\vec{y})=(\mathcal{A}\vec{x}|\mathcal{A}\vec{y})\end{cases}$ $\xleftrightarrow{\text{单位正交基}}$ $\begin{cases}\text{对称矩阵} \\ \text{斜对称矩阵} \\ \text{正交矩阵}\end{cases}$.

Thm：$A\in M_n(\mathbb{R})$ 正规. 则 $\exists\ \alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_s,\beta_s,\lambda_{2s+1},\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$. $\beta_1\cdots\beta_s\neq 0$ s.t.

$$A\sim_o B=\begin{pmatrix} N(\alpha_1,\beta_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & N(\alpha_s,\beta_s) & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix},\quad \text{其中 } N(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta \\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$$

$\beta\neq 0$.

Prop：$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正规. $\lambda_1,\lambda_2\in spec_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$ 且 $\lambda_1\neq\lambda_2$. 则 $V_{\lambda_1}\perp V_{\lambda_2}$

6. 对称算子和对称矩阵

Thm：(1) $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 对称. 则 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下矩阵是 $diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$.

$\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ 不必两两不同.

(2) ~~$\mathcal{A}$~~ $A\in SM_n(\mathbb{R})$. 则 $A\sim_o diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$. $\lambda_i\in\mathbb{R}$ 不必两两不同

(3). $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 $\mathcal{A}$ (or A) 特征根. (实对称矩阵特征根是实数).

会计算：$A\in SM_n(\mathbb{R})$. 求 $P\in O_n(\mathbb{R})$ s.t. $P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

7. 斜对称算子和斜对称矩阵.

Thm: (1) $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 斜对称. 则 $\exists\ \beta_1,\cdots,\beta_s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. s.t. $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵呈

$$M=\begin{pmatrix} N(0,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(0,\beta_s) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $A\in SSM_n(\mathbb{R})$. $A\sim_o M$.

(3) 实斜对称矩阵和欧氏空间上的斜对称算子的特征根或者呈纯虚数或者等于零.

8. 正交算子和正交矩阵.

Thm: (1) $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正交 则 $\exists\ \theta_1,\cdots,\theta_s\in(0,\pi)$, $\lambda_{2s+1},\cdots,\lambda_n\in\{-1,1\}$. s.t.

$\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵呈

$$M=\begin{pmatrix} N(\cos\theta_1,\sin\theta_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & N(\cos\theta_s,\sin\theta_s) & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(2) $A\in O_n(\mathbb{R})$. 则 $A\sim_o M$

(3) 正交矩阵和正交算子的(复)特征根的复数模长都等于1.