中国科学院大学线性代数期末考试卷

2021 年 1 月

编号：B01GB001Y-B02　名称：线性代数I-B　教师：李子明、冯爽、章炳伟

姓名:　　　　　　**学号**:

注意事项：

1.考试时间为 180 分钟，考试方式为闭卷；

2.全部答案写在答题纸上；

3.考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

1. (10分) 设有限域 $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. 计算齐次线性方程组设有限域 $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. 计算齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \bar{2}x_2 + x_3 + \bar{2}x_4 = \bar{0} \\ \bar{2}x_1 + x_2 + \bar{2}x_3 + x_4 = \bar{0} \\ x_1 + x_3 = \bar{0} \end{cases}$$

在 $\mathbb{Z}_3^4$ 中的解空间的一组基和非平凡解的个数.

解. 方程组的系数矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}.$$

由高斯消去法得

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

故 $\mathrm{rank}(A) = 2$. 由对偶定理可知, 方程组解空间的维数等于 2. 直接计算得 $(\bar{2}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0})^t$ 和 $(\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{2})^t$ 是解空间的一组基. 该解空间中共有 *8* 个非平凡解. □

2. (10分) 设实矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

计算 A^{-1} 和 $\det(A^{-1})$

解.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

于是,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \det(A) = -4.$$

故

$$\det(A^{-1}) = -\frac{1}{4}. \quad \square$$

3. (10分) 设有限域 $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$, $f = x^3 + \bar{2}x$ 和 $g = \bar{2}x^2 + \bar{3}$ 是 $\mathbb{Z}_5[x]$ 中的多项式.

(i) 计算 $\mathrm{quo}(f, g, x)$ 和 $\mathrm{rem}(f, g, x)$.

(ii) 计算 $f(\bar{1})$ 和 $f(A)$, 其中 $A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$.

解. (i)

$$f - \bar{3}xg = \bar{3}x \implies \mathrm{quo}(f, g, x) = \bar{3}x, \ \mathrm{rem}(f, g, x) = \bar{3}x.$$

(ii) $f(\bar{1}) = \bar{3}$

$$f(A) = A(A^2 + 2E) = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} + \bar{2}E \right) = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix}. \quad \square$$

4. (10分) 设 $H := \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \mid u, v \in \mathbb{C} \right\}$, 其中 $\bar{u}, \bar{v}$ 分别代表 u, v 的共轭. 证明:

(i) H 是 $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ 的子环;

(ii) 举例说明 H 不是交换环;

(iii) 证明 H 中的每个非零元素是 H 中的可逆元.

解.

(i) 设 $W=\begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u}\end{pmatrix}$ 和 $Z=\begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x}\end{pmatrix}$, 其中 $u,v,x,y\in\mathbb{C}$. 我们有

$$W-Z=\begin{pmatrix} u-x & v-y \\ -\bar{v}+\bar{y} & \bar{u}-\bar{x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u-x & v-y \\ -\overline{v-y} & \overline{u-x}\end{pmatrix}\in H.$$

故 $(H,+,O)$ 是 $(\mathrm{M}_2(\mathbb{C}),+,O)$ 的子群.

计算

$$WZ=\begin{pmatrix} ux-v\bar{y} & uy+v\bar{x} \\ -\bar{v}x-\bar{u}\bar{y} & -\bar{v}y+\bar{u}\bar{x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ux-v\bar{y} & uy+v\bar{x} \\ -\overline{(uy+v\bar{x})} & \overline{ux-v\bar{y}}\end{pmatrix}\in H.$$

注意到

$$E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\bar{0} & \bar{1}\end{pmatrix}\in H.$$

故 H 是 $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ 的子环.

(ii) 设 $A=\begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i}\end{pmatrix}$ 和 $B=\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0\end{pmatrix}$. 则 $A,B\in H$. 直接计算得

$$AB=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

因为 $AB\neq BA$, 所以 H 不是交换环.

(iii) 设 $W\neq O$. 则 $\det(W)=|u|^2+|v^2|\neq 0$. 故 W 是可逆矩阵. 在 $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 中,

$$W^{-1}=\frac{1}{u\bar{u}+v\bar{v}}\begin{pmatrix} \bar{u} & -v \\ \bar{v} & u\end{pmatrix}\in H.$$

故 W 在 H 中可逆. □

5. (10分) 设 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\end{vmatrix}.$$

计算 D_n 的值.

解. 用第 $n-1$ 行去减第 n 行, 然后用第 $n-2$ 行去减第 $n-1$ 行, ..., 直到第一行去减第二行得到

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

也可直接证明 $D_n = D_{n-1}$. 再由 $D_1 = 1$ 得出 $D_n = 1$. □

6. (10分) 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $A^\vee$ 是 A 的伴随矩阵. 证明: A 可逆当且仅当 $A^\vee$ 可逆.

证明. 注意到 $AA^\vee = \det(A)E$. 如果 A 可逆, 则 $\det(A) \neq 0$. 故

$$(\det(A)^{-1}A)A^\vee = E.$$

于是, $A^\vee$ 可逆. 反之, 设 $A^\vee$ 可逆. 再假设 $\det(A) = 0$. 则 $AA^\vee = O$. 故 $A = O$. 于是, $A^\vee = O$, 矛盾. 由此可知, $\det(A) \neq 0$. 从而, A 可逆. □

7. (10分) 设 $(G, \cdot, e)$ 和 $(H, \star, \epsilon)$ 是两个群. 在 $G \times H$ 中定义二元运算 $\circ$ 如下:

$$\forall\, (g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H,\ (g_1, h_1) \circ (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 \star h_2).$$

(i) 证明: $(G \times H,\ \circ,\ (e, \epsilon))$ 是群.

(ii) 令群 G 为 $(\mathbb{Z}_m, +, \bar{0}_m)$, 群 H 为 $(\mathbb{Z}_n, +, \bar{0}_n)$, 其中 m, n 是大于 1 的整数, $\bar{0}_m$ 和 $\bar{0}_n$ 分别代表剩余类环 $\mathbb{Z}_m$ 和 $\mathbb{Z}_n$ 中的加法单位元. 证明: 当 m, n 互素时, $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ 是循环群.

证明. *(i)* 因为 $g_1 \cdot g_2 \in G$, $h_1 \star h_2 \in H$, 所以 $(g_1, h_1) \circ (g_2, h_2) \in G \times H$. 故 $\circ$ 是 $G \times H$ 上的二元运算. 再设 $(g_3, h_3) \in G \times H$. 则

$$\begin{aligned} &((g_1, h_1) \circ (g_2, h_2)) \circ (g_3, h_3) = (g_1 \cdot g_2, h_1 \star h_2) \circ (g_3, h_3) \\ &= ((g_1 \cdot g_2) \cdot g_3, (h_1 \star h_2) \star h_3) = (g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3), h_1 \star (h_2 \star h_3)) \\ &= (g_1, h_1) \circ ((g_2 \cdot g_3), h_2 \star h_3) = (g_1, h_1) \circ ((g_2, h_2) \circ (g_3, h_3)). \end{aligned}$$

结合律成立.

对任意 $(g,h)\in G\times H$, $(g,h)\circ(e,\epsilon)=(g\cdot e,h\star\epsilon)=(g,h)$. 同理, $(e,\epsilon)\circ(g,h)=(g,h)$. 故 (e,ϵ) 是关于 $\circ$ 的单位元. 而 $(g,h)\circ(g^{-1},h^{-1})=(g\cdot g^{-1},h\star h^{-1})=(e,\epsilon)$. 类似, $(g^{-1},h^{-1})\circ(g,h)\circ=(e,\epsilon)$. 于是, $(g,h)^{-1}$ 是 (g^{-1},h^{-1}).

综上所述, $(G\times H,\ \circ,\ (e,\epsilon))$ 是群.

(ii) 设 $a\in\mathbb{Z}$. 用 $\bar{a}_m$ 和 $\bar{a}_n$ 分别代表 a 模 m 和 n 的等价类. 我们来证明

$$\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n=\langle(\bar{1}_m,\bar{1}_n)\rangle.$$

设 $k=\mathrm{ord}((\bar{1}_m,\bar{1}_n))$. 则

$$k(\bar{1}_m,\bar{1}_n)=(k\bar{1}_m,k\bar{1}_n)=(\bar{k}_m,\bar{k}_n)=(\bar{0}_m,\bar{0}_n).$$

故 $m|k$ 且 $n|k$. 因为 m,n 互素, 所以 $mn|k$. 又因为 $\mathrm{card}(\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n)=mn$, 所以 $k=mn$. 由此可知 $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n=\langle(\bar{1}_m,\bar{1}_n)\rangle$. □

8. (10分) 设 D 是唯一分解整环. $a,b\in D$ 是非零且非可逆元, $\gcd(a,b)=1$. 证明:

(i) $\gcd(ab,a+b)=1$;

(ii) 如果 $c\in D$ 是 a,b 的公倍式, 则 $(ab)|c$.

证明. *(i)* 令 $g=\gcd(ab,a+b)$. 如果 g 不可逆, 则存在不可约元 $p\in D$ 使得 $p|g$. 则 $p|ab$. 因为 p 是素元, 所以不妨设 $p|a$. 又因为 $p|a+b$, 所以 $p|b$. 故 p 是 a 和 b 的公因子. 于是, $p|1$. 矛盾.

(ii) 由

$$\mathrm{lcm}(a,b)=\frac{ab}{\gcd(a,b)}\quad 和\quad \gcd(a,b)=1,$$

可直接得出 $ab=\mathrm{lcm}(a,b)$. 因为 c 是 a 和 b 的公倍式, 所以 $(ab)|c$. □

9. (10分) 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $0<k\le\min(m,n)$. 证明:

$$A \text{ 的所有 } k \text{ 阶子式都等于零} \iff \mathrm{rank}(A)<k.$$

证明. 如果 $\mathrm{rank}(A)<k$, 则 A 中所有 k 阶子式都等于零*(矩阵的秩与子式的关系)*.

反之, 设 A 中所有 k 阶子式都等于零. 假设 $\mathrm{rank}(A)=r\ge k$. 则 A 中有 r 个列向量线性无关. 故有 k 个列向量

$$\vec{A}^{(j_1)},\ldots,\vec{A}^{(j_k)}$$

线性无关. 设 B 是由这些列向量构成的 $m\times k$ 阶矩阵. 则 B 的秩等于 k. 故 B 有个 k 阶子式非零. 该子式就是 A 中的一个 k 阶非零子式. 矛盾. □

10. (10分) 设 F 是域, $p, q \in F[x]$, $g = \gcd(p, q)$. 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$. 令 V_p 和 V_q 分别是以 $p(A)$ 和 $q(A)$ 为系数矩阵的齐次线性方程组在 F^n 中的解空间. 证明:

(i) $g(A)$ 可逆 $\iff V_p \cap V_q = \{\mathbf{0}\}$.

(ii) $V_p \oplus V_q = F^n \iff g(A)$ 可逆且 $p(A)q(A) = O_n$, 其中 O_n 代表 $n \times n$ 阶零矩阵.

证明. 存在 $u, v \in F[x]$ 使得 $up + vq = g$. 故

$$u(A)p(A) + v(A)q(A) = g(A).$$

则对于任意 $\mathbf{x} \in F^n$,

$$u(A)p(A)\mathbf{x} + v(A)q(A)\mathbf{x} = g(A)\mathbf{x}. \tag{1}$$

(i) 设 $g(A)$ 可逆. 如果 $\mathbf{x} \in V_p \cap V_q$, 则 (1) 蕴含

$$g(A)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

因为 $g(A)$ 可逆, 所以 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 故 $V_p \cap V_q = \{\mathbf{0}\}$.

反之, 设 $V_p \cap V_q = \{\mathbf{0}\}$. 假设 $g(A)$ 不可逆. 则存在 $\mathbf{y} \in F^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$ 使得 $g(A)\mathbf{y} = \mathbf{0}_n$. 因为存在 $a, b \in F[x]$ 使得 $p = ag$ 和 $q = bg$, 所以

$$p(A) = a(A)g(A) \quad 和 \quad q(A) = b(A)g(A).$$

由此可知,

$$p(A)\mathbf{y} = a(A)(g(A)\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad 和 \quad q(A)\mathbf{y} = b(A)(g(A)\mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

于是, $\mathbf{y} \in V_p \cap V_q$. 矛盾.

(ii) 设 $V_p \oplus V_q = F^n$. 则 $V_p \cap V_q = \{\mathbf{0}\}$. 根据 *(i)* 可知, $g(A)$ 可逆. 设 $\mathbf{x}$ 是 F^n 中任意向量. 则存在 $\mathbf{y} \in V_p$ 和 $\mathbf{z} \in V_q$ 使得 $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$. 故

$$p(A)q(A)\mathbf{x} = q(A)p(A)\mathbf{y} + p(A)q(A)\mathbf{z} = \mathbf{0}.$$

由此得出 $p(A)q(A) = O$.

反之, 设 $g(A)$ 可逆且 $p(A)q(A) = O_n$. 因为 $g(A)$ 可逆, 所以 (1) 蕴含对任意 $\mathbf{x} \in F^n$,

$$\underbrace{g(A)^{-1}u(A)p(A)\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} + \underbrace{g(A)^{-1}v(A)q(A)\mathbf{x}}_{\mathbf{z}} = \mathbf{x}.$$

下面证明 $\mathbf{y} \in V_q$. 注意到 $q(A)g(A) = g(A)q(A)$. 于是, $q(A)g(A)^{-1} = g(A)^{-1}q(A)$. 由此得出

$$q(A)(\mathbf{y}) = q(A)g(A)^{-1}u(A)p(A)\mathbf{x} = g(A)^{-1}q(A)u(A)p(A)\mathbf{x} = g(A)^{-1}u(A)(q(A)p(A))\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

故 $\mathbf{y} \in V_q$. 同理 $\mathbf{z} \in V_p$. 我们得到 $V_p + V_q = F^n$. 再根据 $g(A)$ 可逆和 *(i)* 得到

$$V_p \oplus V_q = F^n. \quad \square$$