中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：B01GB003Y-B02

课程名称：线性代数II-B（期末A卷）

任课教师：李子明、冯爽、姚卓雅

注意事项：

1. 考试时间为180 分钟，考试方式闭卷；

2. 全部答案写在答题纸上；

3. 考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

参考答案及评阅标准

1. (10分) 设 F 是域.

   (i) 设 A=diag$(1,2)$ 和 B=diag$(2,1)$ 是 F 上的二阶矩阵. 求一个矩阵 $P\in\mathrm{GL}_2(F)$ 使得
   $$P^{-1}AP=B.$$

   (ii) 设 $M\in\mathrm{M}_m(F)$ 和 $N\in\mathrm{M}_n(F)$. 证明: $(m+n)$ 阶矩阵
   $$\begin{pmatrix} M & O \\ O & N\end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} N & O \\ O & M\end{pmatrix}$$
   相似.

解. (i) (5分) 设
$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$
直接计算得 $P^{-1}=P$. 计算
$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\mathrm{diag}(1,2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}=\mathrm{diag}(2,1).$$
故 P 为所求的矩阵.

(ii) (5分) 设
$$Q=\begin{pmatrix} O & E_m \\ E_n & O\end{pmatrix}$$
直接验证得
$$Q^{-1}=\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_m & O\end{pmatrix}.$$
且
$$Q^{-1}\begin{pmatrix} M & O \\ O & N\end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix} N & O \\ O & M\end{pmatrix}.$$

2. (10分) 对正整数 $k=2,3,4,\ldots$, 计算 $J_4(0)^k$ 的约当标准型.

解. （*4*分）当 $k=2$ 时,

$$A=J_4(0)J_4(0)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

我们有 $\mathrm{rank}(A)=2$ 且 0 的几何重数等于 $4-2=2$. 故 J_A 有两个约当块. 直接计算得

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=O_{4\times 4}.$$

故 $\mu_A(t)=t^2$. 于是, J_A 中最大的约当块的阶为 *2*. 我们有 $J_A=J_2(0)\dot{+}J_2(0)$.

（*4*分）直接计算得

$$B:=J_4(0)^3=AJ_4(0)=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

因为 $\mathrm{rank}(B)=1$, 所以 $J_B=J_1(0)\dot{+}J_1(0)\dot{+}J_2(0)$.

（*2*分）因为 $A^2=O$, 所以 $J_4(0)^k=O$, $k>3$. 故它们的约当标准型都是 $J_1(0)\dot{+}J_1(0)\dot{+}J_1(0)\dot{+}J_1(0)$.

3. (10分) 设 $\mathbb{R}^3$ 是标准欧氏空间, 其中的三个向量

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{w}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

计算 $\mathbf{u}$ 的长度, $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{w}$ 的夹角, 和 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 组成的平行六面体的体积.

解. $\|\mathbf{u}\|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$. *(3分)*

$$\theta=\arccos\frac{(\mathbf{v}|\mathbf{w})}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

(3分)

$$\det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-2.$$

故体积等于 2. *(4分)*

4. (10分) 设 $\mathbb{R}^4$ 是标准欧氏空间, U 是以

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\1&1&1&1\\1&2&3&2\end{pmatrix}$$

为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间. 记 $U^\perp$ 为 U 的正交补. 计算

(i) $\dim(U)-\dim(U^\perp)$,

(ii) $U^\perp$ 的一组单位正交基.

解. *(i)*（5分）直接计算得 $\mathrm{rank}(A)=2$. 故 $\dim(U)=4-2=2$. 因为 $\mathbb{R}^4=U\oplus U^\perp$, 所以 $\dim(U^\perp)=2$. 由此得到, $\dim(U)-\dim(U^\perp)=0$.

(ii) (5 分) 由矩阵 A 和它的秩可知

$$U^\perp=\langle\vec{A}_1^t,\vec{A}_2^t\rangle.$$

对这两个生成元实施 *Gram-Schmidt* 正交化得 $U^\perp$ 的一组单位正交基

$$\epsilon_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\quad \epsilon_2=\begin{pmatrix}\frac12\\\frac12\\\frac12\\\frac12\end{pmatrix}.$$

5. (10分) 设三阶实对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix},$$

其特征多项式是 $(t-2)^2(t+1)$. 计算正交矩阵 P 和对角矩阵 D 使得 $D=P^tAP$.

解. 先计算 V^2 的一组基. 直接计算得

$$2E-A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

故 V^2 是方程 $x_1+x_2+x_3=0$ 的解空间. 该空间的一组基是

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

故 V^2 的一组单位正交基是:

$$\epsilon_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\quad \epsilon_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

因为 $V^{-1} = (V^2)^{\perp}$, 所以

$$V^{-1} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \rangle.$$

令

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

(7分)

则 $P^t AP = \mathrm{diag}(2, 2, -1) =: D$. *(3分)*

6. (10分) 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性算子.

   (i) 设 $\mathbf{u} \in V$. 证明: 循环子空间 $U = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{u}$ 是 $\mathcal{A}$-不变的;

   (ii) 设 $\lambda \in F$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征根. 证明: 特征子空间 V^{λ} 是 $\mathcal{A}$-不变的

   (iii) 设 W 既是 $\mathcal{A}$ 循环子空间又是 $\mathcal{A}$ 的一个特征子空间. 计算 $\dim(W)$.

证明. *(i) (3分)* 设 $\mathbf{x} \in U$. 则存在 $p \in F[t]$ 使得 $\mathbf{x} = p(\mathcal{A})(\mathbf{u})$. 我们有

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}p(\mathcal{A})(\mathbf{u}) = q(\mathcal{A})(\mathbf{u}),$$

其中 $q(t)=tp(t)$. 故 $\mathcal{A}(\mathbf{x})\in F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{u}$, 即循环子空间 $U=F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{u}$ 是 $\mathcal{A}$-不变的.

(ii) (3分) 设 $\mathbf{x} \in V^{\lambda}$. 则 $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} \in V^{\lambda}$. 故 V^{λ} 是 $\mathcal{A}$-不变的.

(iii) (4分) 设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 在 W 上的限制算子且 $W = V^{\lambda}$. 则 $\mathcal{B}$ 在 W 上是数乘算子 $\lambda\mathcal{E}$. 故 $\mu_{\mathcal{B}} = t - \lambda$. 又因为 $\mathcal{B}$ 是 W 上的循环算子, 所以 $\deg(\mu_{\mathcal{B}}) = \dim(W) = 1$. 于是, $\dim(W) = 1$.

7. (10分) 设 A 是 n 阶复矩阵, $\chi_A=(t-\lambda_1)^{n_1}(t-\lambda_2)^{n_2}\cdots(t-\lambda_k)^{n_k}$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\in\mathbb{C}$, 两两不同, $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}^+$.

   (i) 设 A 的极小多项式 μ_A 等于 χ_A. 计算 A 的约当标准型.

   (ii) 设 $\mu_A = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)^{n_2} \cdots (t - \lambda_k)^{n_k}$. 计算 A 的约当标准型.

解. *(i) (5分)* 因为 $\mu_A = \chi_A$, 所以 $J_{n_i}(\lambda_i)$ 在 J_A 中出现. 又因为 $n_1 + \cdots + n_k = n$. 所以

$$J_A = J_{n_1}(\lambda_1)\dot{+}J_{n_2}(\lambda_2)\dot{+}\cdots\dot{+}J_{n_k}(\lambda_k).$$

(ii) (5分) 此时, $J_1(\lambda_1)$ 是 J_A 中出现的关于 λ_1 的最大约当块. 对 $i = 2, \ldots, k$, $J_{n_i}(\lambda_i)$ 在 J_A 中出现. 又因为 λ_i 的代数重数是 n_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. 所以

$$J_A = \lambda_1 E_{n_1}\dot{+}J_{n_2}(\lambda_2)\dot{+}\cdots\dot{+}J_{n_k}(\lambda_k).$$

8. (10分) 设 $\mathbb{R}^n$ 是标准欧氏空间, 其中的向量是列向量. 设 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 是单位向量. 令 n 阶方阵 $H_{\mathbf{v}} = E - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$, 其中 E_n 代表 n 阶单位矩阵.

   (i) 证明: $H_{\mathbf{v}}$ 既是对称的又是正交的.

   (ii) 计算 $H_{\mathbf{v}}$ 的所有特征根和它们的几何重数.

证明. *(i) (5分)* 直接计算得

$$H_{\mathbf{v}}^t = E^t - 2(\mathbf{v}\mathbf{v}^t)^t = E - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t.$$

于是, $H_{\mathbf{v}}$ 是对称的. 进而,

$$H_{\mathbf{v}}H_{\mathbf{v}} = (E - 2(\mathbf{v}\mathbf{v}^t))(E - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t) = E - 4\mathbf{v}\mathbf{v}^t + 4\mathbf{v}\mathbf{v}^t\mathbf{v}\mathbf{v}^t.$$

因为 $\mathbf{v}$ 是单位向量, 所以 $\mathbf{v}^t\mathbf{v} = 1$. 故

$$H_{\mathbf{v}}H_{\mathbf{v}} = E - 4\mathbf{v}\mathbf{v}^t + 4\mathbf{v}\mathbf{v}^t = E.$$

(ii) (5分) 计算

$$H_{\mathbf{v}}\mathbf{v} = \mathbf{v} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t\mathbf{v} = -\mathbf{v}.$$

故 -1 是 $H_{\mathbf{v}}$ 的特征根. 由 $\mathbf{v}$ 出发可得到 V 的一组单位正交基 $\mathbf{v}, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. 则

$$H_{\mathbf{v}}\mathbf{e}_i = E\mathbf{e}_i - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i$$

故 1 是 $H_{\mathbf{v}}$ 的特征根且 $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ 都在 V^1 中. 由此得出 $\dim(V^1) \geq n-1$. 又因为

$$V^1 + V^{-1}$$

是直和且 $\dim(V^{-1}) > 0$. 于是, $\dim(V^{-1}) = 1$. 故 -1 的几何重数等于 1. 而特征根 1 的几何重数等于 $n-1$.

9. (10分)

   (i) 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 证明:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

   正交相似.

   (ii) 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 是正规矩阵. 证明: A 和 A^t 正交相似.

证明. *(5分) (i)* 设

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

则 P 是正交矩阵. 直接计算得

$$P^t \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} P = P^t \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

于是, *(i)* 成立.

注: 矩阵 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 或 $\mathrm{diag}(1, -1)$ 也可以.

(ii) (5分) 由正规矩阵的正交标准型可知

$$A \sim_o M := \begin{pmatrix} N(\alpha_1, \beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s, \beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\beta_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 2s+1, \ldots, n$. 因为 $A \sim_o M$, 所以 $A^t \sim_o M^t$. 要证明 $A \sim_o A^t$. 只需证明 $M \sim_o M^t$. 设 P 是 *(i)* 中的矩阵,

$$Q := \begin{pmatrix} P & & & \\ & \ddots & & \\ & & P & \\ & & & E_{n-2s} \end{pmatrix}.$$

因为每个 P 都是二阶正交矩阵, 所以 Q 是 n 阶正交矩阵. 根据 *(i)* 的计算可知 $Q^t M Q = M^t$. 故 $M \sim_o M^t$. 由此得出, $A \sim_o A^t$.

10. (10分) 设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性算子, 其互不相同的特征根是 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

    (i) 设 $p(t) = (t-\lambda_1)^{n-m+1} \cdots (t-\lambda_m)^{n-m+1}$. 证明: $p(t)$ 零化 $\mathcal{A}$.

    (ii) 设 $\mathcal{A}$ 的特征多项式 $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t-\lambda_1)^{d_1} \cdots (t-\lambda_m)^{d_m}$. 证明: 对任意正整数 k, $\mathcal{A}^k$ 的特征多项式等于 $(t-\lambda_1^k)^{d_1} \cdots (t-\lambda_m^k)^{d_m}$.

证明. *(i) (5分)* 只要证明 $\mu_{\mathcal{A}}(t) | p(t)$. 根据加强版的 *Cayley-Hamilton* 定理,

$$\mu_{\mathcal{A}} = (t-\lambda_1)^{\ell_1} \cdots (t-\lambda_m)^{\ell_m},$$

其中 $\ell_1, \ldots, \ell_m \in \mathbb{Z}^+$, 且 $\deg(\mu_A) \leq n$. 因此, 只要证明 $\ell_i \leq n-m+1$, $i = 1, \ldots, m$ 即可. 假设 $\ell_m > n-m+1$. 则

$$\ell_1 + \cdots + \ell_{m-1} < n - (n-m+1) = m-1.$$

故 $\ell_1, \ldots, \ell_{m-1}$ 中必有一个是零. 矛盾.

类似地, 我们有 $\ell_i \leq n-m+1$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$. 故 $\mu_{\mathcal{A}} | p$. 从而, $p(\mathcal{A}) = O$.

(ii) (5分) 在 V 某组基下, $\mathcal{A}$ 的矩阵 A 是上三角的. 于是, 在 A 的对角线上一共有 d_i 个 λ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. 而 $\mathcal{A}^k$ 在同样基底下的矩阵是 A^k, 在其对角线上有 d_i 个 λ_i^k, $i = 1, 2, \ldots, m$. 故

$$\chi_{\mathcal{A}^k} = \chi_{A^k} = (t-\lambda_1^k)^{d_1} \cdots (t-\lambda_m^k)^{d_m}.$$