中国科学院大学二零二一年春季线性代数期中考试卷

编号：B01GB003Y-B02　名称：线性代数II-B　教师：李子明、冯爽、姚卓雅

姓名:　　　　　　　**学号**:

注意事项：

1.考试时间为 120 分钟，考试方式为闭卷；

2.全部答案写在答题纸上；

3.考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

1. (15分) 设两个实系数齐次线性方程组是

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

它们的的解空间分别记为 V_A 和 V_B. 计算

(i) $V_A \cap V_B$ 的维数,

(ii) $V_A \cap V_B$ 的一组基,

(iii) $V_A + V_B$ 的维数.

解. *(i)* 两个方程组的系数矩阵分别是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

因为 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = 2$, 所以 $\dim(V_A) = \dim(V_B) = 2$. 因为 $V_A \cap V_B$ 是上述两个方程组联立后的方程组的解空间，所以

$$\dim(V_A \cap V_B) = 4 - \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

由行变换可得

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

于是, $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 3$. 故 $\dim(V_A \cap V_B) = 1$.

(ii) 利用把矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 的化成的阶梯型得到 $(1,1,1,-1)^t$ 是 $V_A \cap V_B$ 的一组基.

(iii) 由维数公式可得 $\dim(V_A+V_B)=2+2-1=3$.

---

2. (15分) 设 $\mathbb{R}^3$ 的标准基是 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$, $\mathbb{R}^2$ 的标准基是 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$. 设 $\phi:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ 是线性映射, 满足

$$\phi(\mathbf{e}_1)=2\varepsilon_1,\ \phi(\mathbf{e}_2)=-3\varepsilon_2,\ \phi(\mathbf{e}_3)=\varepsilon_1+\varepsilon_2.$$

(i) 计算 ϕ 在 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3;\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下的矩阵和 $\operatorname{rank}(\phi)$.

(ii) 设

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

且 $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)B$. 验证 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 也是 $\mathbb{R}^2$ 的一组基.

(iii) 求 ϕ 在 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3;\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 下的矩阵.

解. *(ii)* 由 ϕ 的定义可知

$$(\phi(\mathbf{e}_1),\phi(\mathbf{e}_2),\phi(\mathbf{e}_3))=(\epsilon_1,\epsilon_2)\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}}_{A}.$$

故 A 是 ϕ 在给定基底下的矩阵. 因为 $\operatorname{rank}(A)=2$, 所以 $\operatorname{rank}(\phi)=2$.

(ii) 因为 $\det(B)=1$, 所以 B 可逆. 由此得出 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一组基.

(iii) 计算得

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

故 ϕ 在 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 下得矩阵是

$$B^{-1}A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

---

3. (15分) 设 $\mathbb{R}^3$ 上的二次型 $q(\mathbf{x})=x_1^2-3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2$, 其中 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)^t$.

(i) 计算 q 在 $\mathbb{R}^3$ 的标准基下的矩阵 A.

(ii) 求 $P\in\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ 使得 P^tAP 是对角矩阵, 并求 q 的签名.

解. (i) 二次型 q 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-3&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

(ii) 由行列相伴消元可知

$$(A|E_3)\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&-4&0&-1&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}.$$

令

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

则

$$P^tAP=\mathrm{diag}_3(1,-4,1).$$

于是, q 签名是 *(2,1)*.

---

4. (15分) 设三阶实对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a&1&0\\1&a&0\\0&0&a-1\end{pmatrix}.$$

(i) 设 A 是正定的. 求 a 的取值范围.

(ii) 设 A 是负定的. 求 a 的取值范围.

(iii) 设 A 满秩且是不定的. 求 a 的取值范围.

解. (i) A 的顺序主子式是: a, $a^2-1=(a-1)(a+1)$ 和 $(a-1)(a^2-1)=(a-1)^2(a+1)$. 故当 $a>1$ 时, A 正定.

(ii) $-A$ 的顺序主子式是: $-a$, $(a-1)(a+1)$ 和 $-(a-1)^2(a+1)$. 故当 $a<-1$ 时, $-A$ 正定. 从而, A 负定.

(iii) 因为 A 满秩, 所以当 A 既不正定又不负定时, A 是不定的. 故 $a\in[-1,1]$ 且 $(a-1)^2(a+1)\neq 0$ 时 A 不定. 故 a 的取值范围是 $(-1,1)$.

---

5. (10分) 设 V 是域 F 上的有限维线性空间, $V_1,V_2,\ldots,V_k$ 是 V 的维数大于零的子空间. 设 B_i 是 V_i 的一组基, $i=1,2,\ldots,k$. 再令 $B=B_1\cup B_2\cdots\cup B_k$. 证明: 如果 $V_1+V_2+\cdots+V_k$ 是直和, 则

(i) 对任意 $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ 且 $i \neq j$, $B_i \cap B_j = \emptyset$;

(ii) B 是 $V_1 + V_2 + \cdots + V_k$ 的一组基.

证明. *(i)* 我们利用反证法. 不妨设 $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. 因为基底中的元素都非零向量, 所以 $V_1 \cap V_2 \neq \{\mathbf{0}\}$. 故 $V_1 \cap (V_2 + \cdots + V_k) \neq \{\mathbf{0}\}$. 矛盾.

(ii) 设 $U = V_1 + \cdots + V_k$. 则 $U = \langle B \rangle$. 设 d 是 B 中极大线性无关组中元素的个数. 则 $d = \dim(U) \leq \mathrm{card}(B)$. 另一方面, 因为 $V_1 + \cdots + V_k$ 是直和, 所以

$$d = \dim(V_1) + \cdots + \dim(V_k) = \mathrm{card}(B_1) + \cdots + \mathrm{card}(B_k) \geq \mathrm{card}(B).$$

于是, $d = \mathrm{card}(B)$, 即 B 本身是线性无关的。由此得出 B 是 U 的一组基.

---

6. (10分) 设 F 是域, $f, g \in F[x]$ 是非零多项式, $m = \deg(f)$, $n = \deg(g)$. 令 ℓ 是 f 和 g 的最小公倍式,

$$V = \{p \in F[x] \mid \deg(p) \leq m + n\}.$$

(i) 设 U 是 V 中 f 和 g 的所有公倍式的集合. 验证 U 是 V 的子空间且 $\ell \in U$.

(ii) 证明: $\dim(U) = m + n - d + 1$, 其中 $d = \deg(\ell)$.

证明. *(i)* 设 $a, b \in U$. 对任意 $\alpha, \beta \in F$,

$$f | (\alpha a + \beta b) \quad g | (\alpha a + \beta b).$$

由此可知, $\alpha a + \beta b \in U$. 我们验证了 U 是子空间. 因为 $d \leq m + n$, 所以 $\ell \in U$.

(ii) 注意到 $\ell, x\ell, \ldots, x^{m+n-d}\ell \in U$. 因为这些多项式次数两两不同, 所以它们线性无关. 设 $h \in U$. 因为 h 是 f, g 的公倍式, 所以 h 是 ℓ 的倍式. 故存在 $q \in F[x]$ 使得 $h = q\ell$. 又因为 $\deg(h) \leq m + n$, 所以 $\deg(q) \leq m + n - d$. 令

$$q = q_{m+n-d} x^{m+n-d} + \cdots + q_1 x + q_0, \quad q_i \in F.$$

则

$$h = q_{m+n-d}(x^{m+n-d}\ell) + \cdots + q_1(x\ell) + q_0\ell.$$

故 h 是 $\ell, x\ell, \ldots, x^{m+n-d}\ell$ 在 F 上的线性组合. 由此可知上述多项式是 U 的基底。故 $\dim(U) = m + n - d + 1$.

另解. 考虑线性映射

$$\begin{array}{rccc} \phi: & V & \longrightarrow & V \\ & p & \mapsto & \mathrm{rem}(p, \ell). \end{array}$$

注意到 $d \le m+n$. 故 ϕ 是良定义的.

(i) 由最小公倍式的定义可知 $U = \ker(\phi)$. 于是, U 是子空间. 因为 $\phi(\ell) = 0$, 所以 $\ell \in U$.

(ii) 显然 $\mathrm{im}(\phi) = F[x]^{(d)}$. 故 $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = d$. 于是,

$$\dim(U) = \dim(V) - d = m + n + 1 - d.$$

---

7. (10分) 设 V 是 域 F 上的有限维线性空间, F 的特征不等于 2. 设 $f, g \in V^* \setminus \{\mathbf{0}^*\}$, 其中 V^* 代表 V 的对偶空间, $\mathbf{0}^*$ 代表把 V 中向量都映成 0 的线性函数. 令

$$\begin{array}{rccc} q: & V & \longrightarrow & F \\ & \mathbf{x} & \mapsto & f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}). \end{array}$$

证明:

(i) q 是 V 上的二次型;

(ii) $\mathrm{rank}(q) = \dim\langle f, g\rangle$.

证. *(i)* 设

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}) + f(\mathbf{y})g(\mathbf{x})).$$

则 ϕ 是对称双线性型. 注意到

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = q(\mathbf{x}).$$

故 q 是二次型.

(ii) 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, $\alpha_i = f(\mathbf{e}_i), \beta_j = g(\mathbf{e}_j)$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. 则 q 在该基底下的矩阵是

$$A = (\phi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))_{n\times n} = \left(\frac{\alpha_i\beta_j + \alpha_j\beta_i}{2}\right)_{n\times n} = \frac{1}{2}(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}(\beta_1, \ldots, \beta_n) + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)).$$

由此可知 $\mathrm{rank}(A) \le 2$.

如果 $\dim\langle f, g\rangle = 1$, 则存在 $\lambda \in F \setminus \{0\}$ 使得 $g = \lambda f$, 即 $\beta_j = \lambda\alpha_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 于是,

$$A = \lambda\left(\alpha_i\alpha_j\right)_{n\times n} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

故 $\operatorname{rank}(A)=1$.

如果 $\dim\langle f,g\rangle=2$, 则 $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ 和 $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ 不线性相关. 故矩阵

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\\ \beta_1 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}$$

中由一个二阶子式非零. 不妨设

$$\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}\neq 0.$$

则 A 中的二阶子式

$$\det\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1 & \frac{\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1}{2}\\ \frac{\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1}{2} & \beta_2\alpha_2\end{pmatrix}\neq 0.$$

于是, $\operatorname{rank}(A)\geq 2$ 故 $\operatorname{rank}(A)=2$.

(ii) 的另证. 设 $\dim\langle f,g\rangle=1$. 则存在 $\lambda\in F\setminus\{0\}$ 使得 $g=\lambda f$. 故

$$q(\mathbf{x})=\lambda f^2.$$

设 $f=f_1x_1+\cdots+f_nx_n$, 其中 $f_1,\dots,f_n\in F$ 不全为零. 则

$$q(\mathbf{x})=\lambda(f_1x_1+\cdots+f_nx_n)^2.$$

则由配方法可知, q 在某个坐标变换下的表示为

$$q(\mathbf{y})=\lambda y_1^2.$$

故 $\operatorname{rank}(q)=1$.

设 $\dim\langle f,g\rangle=2$. 再假设 $\operatorname{rank}(q)=1$. 由上述推理可知,

$$q(\mathbf{x})=\alpha(\underbrace{h_1x_1+\cdots+h_nx_n}_{h})^2,$$

其中 $\alpha\in F\setminus\{0\}$, $h_1,\dots,h_n\in F$, 不全为零. 由此和 $q(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ 可知,

$$\ker(f)\subset\ker(h)\quad 和 \quad\ker(g)\subset\ker(h).$$

因为 $\dim(\ker(f))=n-1$ 且 $\dim(\ker(h))=n-1$, 所以 $\ker(f)=\ker(h)$. 同理 $\ker(g)=\ker(h)$. 故 $\ker(f)=\ker(g)$. 根据科斯特利金第二卷第 *26* 页第 *3* 题, f 和 g 线性相关. 由此得出 $\dim\langle f,g\rangle=1$. 矛盾.

8. (10分) 设 n 阶实对称矩阵 A,B 都是半正定的. 证明：

(i) $A+B$ 是半正定的;

(ii) $\operatorname{rank}(A+B)\geq\max(\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B))$.

证明. *(i)* 设 $\mathbf{x}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的任意向量. 则

$$\mathbf{x}^t(A+B)\mathbf{x}=\mathbf{x}^tA\mathbf{x}+\mathbf{x}^tB\mathbf{x}\geq 0.$$

故 $A+B$ 是半正定的.

(ii) 设 $A=P^tP$ 和 $B=Q^tQ$, 其中 $P,Q\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 则 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(P)$ 且 $\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}(Q)$. 不妨设 $r=\operatorname{rank}(P)\geq\operatorname{rank}(Q)$.

由 *(i)* 可知, 存在 $R\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 使得 $A+B=R^tR$, 且 $s:=\operatorname{rank}(A+B)=\operatorname{rank}(R)$. 我们只要证明 $s\geq r$. 为此只要证明 $V_R\subset V_P$. 设 $\mathbf{v}\in V_R$. 则 $R\mathbf{v}=\mathbf{0}$. 故

$$\mathbf{v}^t(A+B)\mathbf{v}=0\Longrightarrow\mathbf{v}^tA\mathbf{v}+\mathbf{v}^tB\mathbf{v}=0\xRightarrow{A,\,B\text{ 半正定}}\mathbf{v}^tA\mathbf{v}=0\quad\text{且}\quad\mathbf{v}^tB\mathbf{v}=0.$$

由此可知, $\mathbf{v}^tA\mathbf{v}=0$, 即 $\mathbf{v}^tP^tP\mathbf{v}=\mathbf{0}$. 故 $P\mathbf{v}=\mathbf{0}$. 即 $V_R\subset V_P$.

(ii) 的另证. 对 $\mathbb{R}^n$ 上的二次型 $q(\mathbf{x})=\mathbf{x}^tM\mathbf{x}$. 我们记

$$C_M=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\mid q(\mathbf{x})=0\}.$$

当 M 半正定时, C_M 是子空间(见第一章第六讲例 *9.14*). 故 C_A,C_B,C_{A+B} 都是子空间.

设 二次型 $q_A(\mathbf{x})=\mathbf{x}^tA\mathbf{x}$ 的在 基底 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 下的规范型是

$$q_A(\mathbf{y})=y_1^2+\cdots+y_k^2,$$

其中 $\mathbf{y}=y_1\mathbf{v}_1+\cdots+y_k\mathbf{v}_k+y_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}+\cdots+y_n\mathbf{v}_n$. 则 $C_A=\langle\mathbf{v}_{k+1},\ldots,\mathbf{v}_n\rangle$. 特别地, $\dim(C_A)=n-k$, 其中 $k=\operatorname{rank}(A)$. 同理

$$\dim(C_B)=n-\operatorname{rank}(B)\quad\text{和}\quad\dim(C_{A+B})=n-\operatorname{rank}(A+B).$$

因为 A 和 B 都是半正定的, 所以 $C_{A+B}\subset C_A\cap C_B$. 故

$$n-\operatorname{rank}(A+B)=\dim C_{A+B}\leq\min(\dim(C_A),\dim(C_B))=n-\max(\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)).$$

故 $\operatorname{rank}(A+B)\geq\max(\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B))$.

(ii) 的又另证.

断言. 设 $M\in\mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 半正定, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$. 则

$$\mathbf{x}^tM\mathbf{x}=0\iff M\mathbf{x}=0.$$

断言的证明. “$\Longleftarrow$ ”显然.

“$\Longrightarrow$ ”因为 M 半正定, 所以存在 $P \in \mathrm{M}_n(R)$ 使得 $M = P^t P$. 我们有

$$\mathbf{x}^t M\mathbf{x} = 0 \Longrightarrow \mathbf{x}^t P^t P\mathbf{x} = 0 \Longrightarrow (P\mathbf{x})^t(P\mathbf{x}) = 0 \Longrightarrow P\mathbf{x} = 0 \Longrightarrow P^t P\mathbf{x} = 0 \Longrightarrow M\mathbf{x} = 0.$$

断言成立.

设 V_M 是 $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解空间. 设 $\mathbf{v} \in V_{A+B}$. 则 $\mathbf{v}^t(A+B)\mathbf{v} = 0$ (上述断言). 故 $\mathbf{v}^t A\mathbf{v} + \mathbf{v}^t B\mathbf{v} = 0$. 因为 A 和 B 都半正定, 所以 $\mathbf{v}^t A\mathbf{v} = 0$ 且 $\mathbf{v}^t B\mathbf{v} = 0$. 再利用断言可知, $A\mathbf{v} = 0$ 且 $B\mathbf{v} = 0$. 即 $\mathbf{v} \in V_A \cap V_B$. 我们得到

$$V_{A+B} \subset V_A \cap V_B.$$

故

$$\dim(V_{A+B}) \leq \dim(V_A \cap V_B) \Longrightarrow n - \mathrm{rank}(A+B) \leq n - \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq n - \max(\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)).$$

由此得出 $\mathrm{rank}(A+B) \geq \max(\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B))$.