二零二零年秋季线性代数期中考试卷(参考答案)

编号：B01GB001Y-B02　名称：线性代数I-B　教师：李子明、冯爽、章炳伟

姓名:　　　　　　**学号:**

注意事项：

1.考试时间为 120 分钟，考试方式为闭卷；

2.全部答案写在答题纸上；

3.考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

1. (10分) 设置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 1 & 5 & 7 & 9 & 6 & 4 & 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

计算 σ 的阶, 并确定 σ 的奇偶性.

解: 因为 $\sigma = (1, 10, 2)(3598)(47)$, 所以 σ 的阶等于 $\operatorname{lcm}(3, 4, 2) = 12$. 而它的符号等于 $(-1)^{2+3+1} = 1$. 故 σ 是偶置换. □

2. (15分) 设 $\phi : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ 是线性映射, ϕ 在标准基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) 计算 $\dim(\ker(\phi))$ 和 $\dim(\operatorname{im}(\phi))$.

(ii) 计算 $\ker(\phi)$ 的一组基.

(iii) 设：

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

判定 $\mathbf{v}$ 是否在 $\operatorname{im}(\phi)$ 中, 并说明理由.

解. *(i)* 对矩阵 A 做初等行变换得*:*

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

故 $\operatorname{rank}(A) = 2$. 由此可知 $\dim(\operatorname{im}(\phi)) = 2$. 根据对偶定理, $\dim(\ker(\phi)) = 5 - 2 = 3$.

(ii) 由上述行变换可得 $\ker(\phi)$ 是方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_3+x_4+x_5=0 \\ 2x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$$

的解空间. 其一组基是

$$(-2,\frac{1}{2},1,0,0)^t,\ (-1,-\frac{1}{2},0,1,0)^t,\ (-1,0,0,0,1)^t.$$

注: 基底不唯一.

(iii) 对下列矩阵做行变换

$$B=\begin{pmatrix}1&0&2&1&1&1\\0&2&-1&1&0&1\\1&6&-1&4&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&1&1&1\\0&2&-1&1&0&1\\0&6&-3&3&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&1&1&1\\0&2&-1&1&0&1\\0&0&0&0&0&-2\end{pmatrix}.$$

故 $\operatorname{rank}(B)=3\neq\operatorname{rank}(A)$. 以 B 为增广矩阵的线性方程组无解. 于是, $\mathbf{v}\notin\operatorname{im}(\phi)$. $\square$

3. (15分) 设 $\mathbb{R}$ 上的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\c_1&c_2&c_3&c_4\end{pmatrix}.$$

(i) 证明: A 是幂零矩阵. (ii) 判定 B 是不是幂等矩阵? 并说明理由. (iii) 计算 AMB.

解. *(i)* 直接计算得

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\quad 和 \quad A^3=O.$$

故 A 是幂零的.

(ii) 直接计算得

$$B^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=B.$$

于是, B 是幂等的.

(iii)

$$
\begin{aligned}
AMB &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} B \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & a_4 - a_3 \\ b_1 & 0 & 0 & b_4 - b_3 \end{pmatrix}. \quad \square
\end{aligned}
$$

4. (15分) 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 如果存在可逆方阵 $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$A = P^t B P,$$

其中 P^t 代表 P 的转置, 则称 A 与 B 是合同的, 并记为 $A \sim_c B$. 验证合同关系 $\sim_c$ 是等价关系.

证明. 对任意 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $A = E^t A E$. 故 $A \sim_c A$. 自反性成立.

再设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 使得 $A \sim_c B$. 则存在可逆方阵 P 使得

$$A = P^t B P \implies B = (P^t)^{-1} A P^{-1} = (P^{-1})^t A P^{-1}.$$

对称性成立.

进一步假设 $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 且 $A \sim_c B$ 和 $B \sim_c C$. 则存在可逆方阵 P, Q 使得

$$A = P^t B P,\ B = Q^t C Q \implies A = P^t Q^t C Q P = (QP)^t C (QP),$$

注意到 PQ 也是可逆矩阵. 故 $A \sim_c C$. 传递性成立. $\square$

5. (10分) 设 $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $g = \gcd(m, n)$. 再设 $u, v, d \in \mathbb{Z}$ 使得 $um + vn = d$.

(i) 证明: $g|d$.

(ii) 设 $\ell = n/g$. 证明: 存在 $a \in \{0, 1, \ldots, \ell - 1\}$ 和 $b \in \mathbb{Z}$ 使得 $am + bn = d$.

证明. (i) 因为 $g|m$ 和 $g|n$, 所以 g 整除 m, n 的任意整系数线性组合. 故 $g|d$.

(ii) 设 $k=m/g$. 则 $m=kg$ 且 $n=\ell g$. 再令 $h=d/g$. 由 *(i)* 可知, h 也是整数. 因为 k,ℓ 互素, 所以存在 $u,v\in\mathbb{Z}$ 使得

$$uk+v\ell=1,$$

故

$$(uh)k+(vh)\ell=h.$$

由整数除法可知,

$$uh=q\ell+a$$

其中 $a\in\{0,1,\dots,\ell-1\}$. 故

$$ak+b\ell=h,$$

其中 $b=qk+vh$. 把上式两侧同乘以 g 得

$$am+bn=d. \quad \square$$

6. (10分) 设 $k>1$, $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k\in\mathbb{R}^n$ 且存在不全为零的实数 $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ 使得

$$\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{v}_k=\mathbf{0}_n.$$

(i) 证明: $\dim\langle\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k\rangle<k$.

(ii) 再设存在实数 $\beta_1,\dots,\beta_k$ 使得 $\beta_1\mathbf{v}_1+\cdots+\beta_k\mathbf{v}_k=\mathbf{0}_n$ 且

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_k\\ \beta_1 & \cdots & \beta_k\end{pmatrix}=2.$$

证明: $\dim\langle\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k\rangle<k-1$.

证明. 设 $V=\langle\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k\rangle$.

(i) 注意到生成元 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k$ 中的任意极大线性无关组都是 V 的基. 因为 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k$ 线性相关, 所以 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k$ 中的任意极大线性无关组中元素的个数小于 k. 故 $\dim(V)<k$.

(ii) 不妨设 $\alpha_1\neq 0$, 则

$$\mathbf{0}=\beta_1\mathbf{v}_1+\cdots+\beta_k\mathbf{v}_k-\beta_1\alpha_1^{-1}(\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{v}_k)=(\beta_2-\alpha_1^{-1}\beta_1\alpha_2)\mathbf{v}_2+\cdots+(\beta_k-\alpha_1^{-1}\beta_1\alpha_k)\mathbf{v}_k.$$

根据给定矩阵秩的条件,

$$\beta_2-\alpha_1^{-1}\beta_1\alpha_2,\ \dots,\ (\beta_k-\alpha_1^{-1}\beta_1\alpha_k)$$

不全为零(否则, 行变换会导致给定矩阵的秩小于 2). 故 $\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k$ 线性相关. 又因为 $\mathbf{v}_1$ 是 $\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k$ 的线性组合. 所以

$$V=\langle \mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\rangle.$$

再根据 (i) 可得 $\dim(V)<k-1$. □

7. (15分) 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, $\dim(U)=d$ 且 $0<d<n$. 证明:

(i) 存在线性映射 $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 使得 $U=\ker(\phi)$;

(ii) 存在线性映射 $\psi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 使得 $U=\mathrm{im}(\psi)$;

(iii) 存在 $A\in\mathbb{R}^{(n-d)\times n}$ 使得 U 是齐次线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}_{n-d}$ 的解空间, 其中

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

证明. 设 U 的一组基是 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_d$ 和 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基.

(i) 把 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_d$ 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_d,\mathbf{u}_{d+1},\ldots,\mathbf{u}_n$. 考虑线性映射 $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 使得 $\phi(\mathbf{u}_i)=\mathbf{0}$, $i=1,2,\ldots,d$, 且 $\phi(\mathbf{u}_{d+j})=\mathbf{e}_{d+j}$, $j=1,\ldots,n-d$. 则 $\mathrm{im}(\phi)=\langle\mathbf{e}_{d+1},\ldots,\mathbf{e}_n\rangle$. 故 $\dim(\mathrm{im}(\phi))=n-d$. 由对偶定理可知, $\dim(\ker(\phi))=d$. 又因为 $U\subset\ker(\phi)$, 所以 $U=\ker(\phi)$.

(ii) 考虑线性映射 $\psi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 使得 $\psi(\mathbf{e}_i)=\mathbf{u}_i$, $i=1,\ldots,d$, 且 $\psi(\mathbf{e}_j)=\mathbf{0}$, $j=d+1,\ldots,n$. 则 $\mathrm{im}(\psi)\subset U$. 又因为 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_d\in\mathrm{im}(\psi)$ 且 $\mathrm{im}(\psi)$ 是子空间, 所以 $U\subset\mathrm{im}(\psi)$. 故 $U=\mathrm{im}(\psi)$.

(iii) 设 B 是 (i) 中 ϕ 在标准基下的矩阵. 则 $U=\ker(\phi)=\mathrm{sol}(B\mathbf{x}=\mathbf{0}_n)$. 因为 $\dim U=d$, 所以 $\dim(\mathrm{im}(\phi))=n-d$. 故 $\mathrm{rank}(B)=n-d$. 设 A 是由 B 中 $(n-d)$ 个线性无关的行向量组成的矩阵. 则 B 中的其它行向量都是 A 中行向量的线性组合. 故 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}_{n-d}$ 和 $B\mathbf{x}=\mathbf{0}_n$ 等价. 由此可知, $U=\mathrm{sol}(A\mathbf{x}=\mathbf{0}_{n-d})$. □

8. (10分) 设 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\phi_A:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 是在标准基下以 A 为矩阵的线性映射. 证明:

(i) $\ker(\phi_A)\subset\ker(\phi_A^2)$, $\quad\mathrm{im}(\phi_A)\supset\mathrm{im}(\phi_A^2)$.

(ii) $\ker(\phi_A)\cap\mathrm{im}(\phi_A)=\{\mathbf{0}_n\}\iff\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^2)$.

证明. *(i)* 设 $\mathbf{v}\in\ker(\phi)$. 则 $\phi^2(\mathbf{v})=\phi(\mathbf{0})=\mathbf{0}$. 于是, $\mathbf{v}\in\ker(\phi^2)$. 故 $\ker(\phi_A)\subset\ker(\phi_A^2)$. 设 $\mathbf{v}\in\mathrm{im}(\phi^2)$. 则存在 $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\mathbf{v}=\phi^2(\mathbf{w})=\phi(\phi(\mathbf{w}))$. 于是, $\mathbf{v}\in\mathrm{im}(\phi)$. 我们有 $\mathrm{im}(\phi^2)\subset\mathrm{im}(\phi)$.

(ii) 设 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A^2)$. 则 $\dim(\operatorname{im}(\phi))=\dim(\operatorname{im}(\phi^2))$. 由对偶定理, $\dim(\ker(\phi))=\dim(\ker(\phi^2))$. 再由 *(i)* 可知 $\ker(\phi)=\ker(\phi^2)$. 设 $\mathbf{v}\in\ker(\phi)\cap\operatorname{im}(\phi)$. 则存在 $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\mathbf{v}=\phi(\mathbf{w})$ 且 $\phi(\mathbf{v})=\phi^2(\mathbf{w})=\mathbf{0}$. 故 $\mathbf{w}\in\ker(\phi^2)$. 由此得出 $\mathbf{w}\in\ker(\phi)$. 于是, $\mathbf{v}=\phi(\mathbf{w})=\mathbf{0}$.

反之, 设 $\ker(\phi)\cap\operatorname{im}(\phi)=\{\mathbf{0}\}$. 如果 $\operatorname{rank}(A)\neq\operatorname{rank}(A^2)$, 则 $\operatorname{rank}(A)>\operatorname{rank}(A^2)$. 于是, $\dim(\operatorname{im}(\phi))>\dim(\operatorname{im}(\phi^2))$. 由对偶定理可知, $\dim(\ker(\phi))<\dim(\ker(\phi^2))$. 故 $\ker(\phi)\subsetneq\ker(\phi^2)$. 设 $\mathbf{v}\in\ker(\phi^2)\setminus\ker(\phi)$ 和 $\mathbf{w}=\phi(\mathbf{v})$. 则 $\mathbf{w}\neq\mathbf{0}$. 但 $\phi(\mathbf{w})=\phi^2(\mathbf{v})=\mathbf{0}$. 故 $\mathbf{w}\in\ker(\phi)\cap\operatorname{im}(\phi)$. 矛盾. $\square$