期中复习

一. 抽象线性空间.

1. 定义: $(V,+,0)$交换群, F域. 数乘: $F\times V\longrightarrow V$ 满足:
$(\alpha,\vec{v})\longmapsto\alpha\vec{v}$

① $\forall\alpha,\beta\in F$, $\vec{v}\in V$. $(\alpha\beta)\vec{v}=\alpha(\beta\vec{v})$

② $\forall\vec{v}\in V$. $1\cdot\vec{v}=\vec{v}$

③ $\forall\alpha,\beta\in F$, $\vec{v}\in V$, $(\alpha+\beta)\vec{v}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}$

④ $\forall\alpha\in F$. $\vec{u},\vec{v}\in V$. $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$.

eg: $\mathbb{R}^n$. $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{C}^n$. $\underset{\text{共有}p^n\text{个元素}}{\underline{\mathbb{Z}_p^n}}$. 形如 $\underset{\text{坐标空间}}{\underline{F^n}}$. ($F$域), $\underset{\text{矩阵空间}}{\underline{F^{m\times n}}}$

2. 子空间: V是F上线性空间. $W\subset V$. $W\neq\phi$.
W是V子空间 $\Leftrightarrow$ $\forall\alpha,\beta\in F$. $\vec{x},\vec{y}\in W$. $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\in W$

eg: ① $SM_n(F)$, $SSM_n(F)$ 是 $M_n(F)$的子空间

② U_1,U_2是V子空间. 则 $U_1\cap U_2$, U_1+U_2也是V子空间

$U_1\cup U_2$是子空间 $\Leftrightarrow$ $U_1\subseteq U_2$ or $U_2\subseteq U_1$

维数公式: $\dim(U_1+U_2)=\dim U_1+\dim U_2-\dim(U_1\cap U_2)$

3. 子空间的直和.

V是线性空间. $V_1,\cdots,V_k$是V子空间

$W=V_1\oplus\cdots\oplus V_k$ $\Leftrightarrow$ $\forall\vec{w}\in W$, $\exists!\,\vec{v_i}\in V_i$. $i=1,\cdots,k$, s.t. $\vec{w}=\vec{v_1}+\cdots+\vec{v_k}$.

$\Leftrightarrow$ 如果 $\vec{0}=\vec{v_1}+\cdots+\vec{v_k}$, $\vec{v_i}\in V_i$. 则 $\vec{v_1}=\cdots=\vec{v_k}=\vec{0}$.

$\Leftrightarrow$ $\forall i\in\{1,2,\cdots,k\}$. $V_i\cap(V_1+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}+\cdots+V_k)=\{\vec{0}\}$.

$\Leftrightarrow$ $\dim(W)=\dim(V_1)+\cdots+\dim(V_k)$

eg: ① $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 一组基，则 $\mathbb{R}^n = \langle \vec{v_1} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \vec{v_n} \rangle$

② $\operatorname{char} F \neq 2$. $M_n(F) = SM_n(F) \oplus SSM_n(F)$.

③ V 线性空间，$V_1, \cdots, V_k$ 子空间. 如果 $V_1 + \cdots + V_k$ 是直和，则对 $\forall l \in \{1, \cdots, k\}$ $V_1 + \cdots + V_l$ 也是直和

④ V 线性空间. V_1, V_2, V_3, V_4 子空间. 如果 $V = V_1 \oplus V_2$ 且 $V_1 = V_3 \oplus V_4$，则 $V = V_3 \oplus V_4 \oplus V_2$

线性相关性、子空间的生成元相关内容大家看李老师讲义复习.

二. 线性映射.

1. 定义: V, W 是 F 上线性空间. $\varphi: V \to W$. 满足.

$$\forall \alpha, \beta \in F, \vec{u}, \vec{v} \in V \text{ s.t. } \varphi(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha \varphi(\vec{u}) + \beta \varphi(\vec{v}).$$

线性同构 = 线性映射 + 双射.

$\operatorname{im} \varphi = \{\varphi(\vec{v}) \mid \vec{v} \in V\}$. $\ker \varphi = \{\vec{v} \in V \mid \varphi(\vec{v}) = \vec{0}\}$. ~~都~~分别是 W, V 的子空间.

φ 满 $\Leftrightarrow \operatorname{im} \varphi = W$.

φ 单 $\Leftrightarrow \ker \varphi = \{\vec{0}\}$.

eg: $\Phi: \operatorname{Hom}(F^n, F^m) \longrightarrow F^{n \times m}$ 线性同构.

$\varphi \longrightarrow A_\varphi$. ($\varphi$ 在标准基下的矩阵)

2. 设 $\varphi: V \to W$ 线性映射. V 一组基 $\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}$, W 一组基 $\vec{\varepsilon_1}, \cdots, \vec{\varepsilon_m}$.

$$(\varphi(\vec{e_1}), \cdots, \varphi(\vec{e_n})) = (\vec{\varepsilon_1}, \cdots, \vec{\varepsilon_m}) \underbrace{A}_{\varphi \text{在 } \vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}; \vec{\varepsilon_1}, \cdots, \vec{\varepsilon_m} \text{ 下的矩阵}}$$

Th: $\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W)$. 再设 $\vec{e_1}', \cdots, \vec{e_n}'$ 和 $\vec{\varepsilon_1}', \cdots, \vec{\varepsilon_m}'$ 是 V 和 W 的另一组基且.

$(\vec{e_1}', \cdots, \vec{e_n}') = (\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}) P$, $(\vec{\varepsilon_1}', \cdots, \vec{\varepsilon_m}') = (\vec{\varepsilon_1}, \cdots, \vec{\varepsilon_m}) Q$. $P \in GL_n(F)$, $Q \in GL_m(F)$

如果 φ 在 $\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}; \vec{\varepsilon_1}, \cdots, \vec{\varepsilon_m}$ 下的矩阵是 A，则 φ 在 $\vec{e_1}', \cdots, \vec{e_n}'; \vec{\varepsilon_1}', \cdots, \vec{\varepsilon_m}'$ 下矩阵是 $Q^{-1} A P$.

三. 商空间.

1. 线性映射基本定理I.

$\varphi: V \to W$. 线性映射. 则 $\exists!$ 线性单射 $\bar{\varphi}$ s.t. $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi_{\ker(\varphi)}$.

特别地: $V/\ker\varphi \cong \operatorname{im}\varphi$.

线性同构.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_{\ker\varphi}"'] & W \\ V/\ker\varphi \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

2. V_1, V_2 是 V 子空间, 则. $V_2/(V_1 \cap V_2) \cong (V_1+V_2)/V_1$

注: 如果 V 是有限维. 则 $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$. U 是 V 子空间.

$V/\ker\varphi \cong \operatorname{im}\varphi \implies \dim V = \dim(\ker\varphi) + \dim(\operatorname{im}\varphi)$

$V_2/(V_1 \cap V_2) \cong (V_1+V_2)/V_1 \implies \dim(V_1+V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

四. 基底与维数

1. 基扩充定理: V 有限维线性空间. 如果 $S \subset V$ 是线性无关集

则 $\exists$ V 的基底 T s.t. $S \subset T$.

2. 线性映射基本定理II.

V, W 是 F 上线性空间, $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ 是 V 的一组基, $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n \in W$,

则 $\exists!$ 线性映射 $\varphi: V \to W$ s.t. $\varphi(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$, $i = 1, \dots, n$.

3. $\dim(V) < \infty$, $\dim(W) < \infty$. F 上线性空间.

$V \cong W \iff \dim(V) = \dim(W)$.

特别地, 当 $\dim_F(V) = n$ 时, V 和 F^n 线性同构

4. ① U 是 V 子空间. $U \neq V \iff \dim(U) < \dim(V)$

② V_1, V_2 是 V 子空间. $\dim(V_1+V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$

③ $\varphi: V \to W$ 线映, $\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\operatorname{im}\varphi) = \dim(V)$

④ $V_1,\cdots,V_k$是V子空间

$\dim(V_1+\cdots+V_k)\le\dim(V_1)+\cdots+\dim(V_k)$. "="成立 $\Leftrightarrow V_1+\cdots+V_k$是直和.

5. 利用线性映射的核证明矩阵秩的不等式.

五. 基变换与坐标变换.

Thm: $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$是V一组基. $\vec{e_1}',\cdots,\vec{e_n}'\in V$.

$\vec{e_1}',\cdots,\vec{e_n}'$是V一组基 $\Leftrightarrow \exists!\, P\in GL_n(F)$ s.t. $(\vec{e_1}',\cdots,\vec{e_n}')=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})P$.

Thm: $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$; 和$\vec{e_1}',\cdots,\vec{e_n}'$是V两组基. $\vec{x}\in V$. $(\vec{e_1}',\cdots,\vec{e_n}')=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})P$

$\vec{x}=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(\vec{e_1}',\cdots,\vec{e_n}')\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}$ 则 $\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

六. 对偶空间.

V是F上n维线性空间. $V^*=\mathrm{Hom}(V,F)$. i.e. V^*是V上所有线性函数的集合.

Thm: $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$是V一组基. 则$\exists!$ V^*一组基 $\vec{e_1}^*,\cdots,\vec{e_n}^*$ 满足 $\vec{e_i}^*(\vec{e_j})=\delta_{ij}$.
$\forall i,j\in\{1,\cdots,n\}$

特别地, $\dim V^*=n$.

$\vec{e_1}^*,\cdots,\vec{e_n}^*$ 称为$\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$的对偶基.

prop: ① $\vec{x}=x_1\vec{e_1}+\cdots+x_n\vec{e_n}$. $x_i=\vec{e_i}^*(\vec{x})$. $i=1,\cdots,n$.

② $f_1,\cdots,f_n$是V^*一组基, $\vec{x},\vec{y}\in V$. 则 $\vec{x}=\vec{y}\Leftrightarrow f_i(\vec{x})=f_i(\vec{y})$. $i=1,\cdots,n$

eg: $U=\langle\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}\rangle$, $V=\langle\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\rangle$. 求$U+V$, $U\cap V$的基.

$U+V=\langle\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3},\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\rangle$

$U\cap V$: 法一: 设 $\vec{w}\in U\cap V$, $\vec{w}=x_1\vec{u_1}+x_2\vec{u_2}+x_3\vec{u_3}=y_1\vec{v_1}+y_2\vec{v_2}+y_3\vec{v_3}$. ...

法二: U.V看成齐次线性方程组的解空间. 设其对应的方程组为
$A\vec{x}=\vec{0}$, $B\vec{x}=\vec{0}$.

则 $U\cap V$是 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\vec{x}=\vec{0}$的解空间.

七. 双线性型.

1. 定义: V是F上n维线性空间. $n>0$.

$$f: V\times V \longrightarrow F$$
$$(\vec{x},\vec{y}) \longmapsto f(\vec{x},\vec{y})$$

$\forall \alpha,\beta\in F, \vec{z}\in V$. $f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{z},\vec{y})=\alpha f(\vec{x},\vec{y})+\beta f(\vec{z},\vec{y})$

$f(\vec{x},\alpha\vec{y}+\beta\vec{z})=\alpha f(\vec{x},\vec{y})+\beta f(\vec{x},\vec{z})$

Thm: V一组基 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$. f是V双线性型. $\exists!\ A\in M_n(F)$ s.t.

$\forall \vec{x}=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $\vec{y}=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ 有 $f(\vec{x},\vec{y})=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$.

事实上, $A=(f(\vec{e_i},\vec{e_j}))_{n\times n}$. 称$A$为$f$在$\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$下的矩阵表示

Note: f是V双线性型. f在V上两组基$\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$和$\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_n}$下矩阵表示分别

是A, B, 且 $(\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_n})=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})P$. $P\in GL_n(F)$.

则 $B=P^tAP$

Def: $A,B\in M_n(F)$, 若$\exists\ P\in GL_n(F)$ s.t. $B=P^tAP$. 称 $B\sim_c A$.
合同关系

一个双线性型在不同基底下的矩阵是合同的.

两个合同的矩阵一定是一个双线性型在不同基底下的矩阵.

eg: $A\in M_n(F)$. 则 $f: F^n\times F^n \longrightarrow F$ 是F^n上双线性型.

$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} \longmapsto (x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$. f在标准基下矩阵是A

prop: $A,B\in M_n(F)$. 若$A\sim_c B$, 则 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$.

def: f是V上双线性型. A是f在V某组基下矩阵. $\mathrm{rank}(f):=\mathrm{rank}(A)$

2. 对称双线性型

$L_2(V)$：V上所有双线性型集合

Def：$\forall \vec{x},\vec{y}\in V$，$f(\vec{x},\vec{y})=f(\vec{y},\vec{x})$，称$f$是对称的。 $\to L_2^+(V)$

$f(\vec{x},\vec{y})=-f(\vec{y},\vec{x})$ 称f是(斜)对称的。 $\to L_2^-(V)$

prop：① $\mathrm{char}F\neq 2$，$L_2(V)=L_2^+(V)\oplus L_2^-(V)$

② 合同保持对称和斜对称性。 $A\in M_n(F)$，$A\sim_c B$，A(斜)对称 $\Rightarrow B$(斜)对称

Thm：$\mathrm{char}F\neq 2$，$f\in L_2^+(V)$，则V中有一组基 s.t. f在该基下矩阵是对角阵。

（$A\in SM_n(F)$，A合同于一个对角阵） 规范基 规范矩阵

规范型：$f(\vec{x},\vec{y})=\lambda_1x_1y_1+\cdots+\lambda_rx_ry_r$ $r=\mathrm{rank}(f)$

Cor：$A\in SM_n(F)$，$\mathrm{rank}(A)=r$，$A\sim_c\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots\ 0\end{pmatrix}$ $\lambda_i\neq 0$。

eg：$A\in SM_n(\mathbb{C})$，$\mathrm{rank}(A)=r$，$A\sim_c\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

对称矩阵化为对角阵：$A\in SM_n(F)$

1. 降维法

2. 行列相伴变换 $(A\,\vdots\,E)\longrightarrow(\underset{\text{对角}}{B}\,\vdots\,Q)$ $P=Q^t$，则 $P^tAP=B$

3. 配方法 $p(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}x_ix_j$

①若$\exists a_{ii}\neq 0$，设$a_{11}\neq 0$，令 $y_1=x_1+\sum_{j=2}^n\frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j$ 且 $y_i=x_i$ $(i=2,\cdots,n)$

②若$\forall a_{ii}=0$，$\exists a_{ij}\neq 0$，设$a_{12}\neq 0$，令 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\ x_2=y_1-y_2\\ x_i=y_i\quad(i=3,\cdots,n)\end{cases}$ 再用①

4. Jacobi公式。设Δ_k是A的k阶顺序主子式，$k=1,\cdots,n$，$\Delta_0=1$

若$\Delta_k\neq 0$，则 $A\sim_c\mathrm{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0},\frac{\Delta_2}{\Delta_1},\cdots,\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)$

八. 二次型.

V是F上有限维线性空间.

1. 定义: $q: V \to F$. ① $\forall \vec{v} \in V$, $q(\vec{v}) = q(-\vec{v})$

② $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$, $f(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(q(\vec{x}+\vec{y}) - q(\vec{x}) - q(\vec{y}))$

是V上双线性型. f称为q的配极.

Note: $q(\vec{0}) = 0$.

2. $Q(V)$, $L_2^+(V)$, $SM_n(F)$是线性同构的.

$$Q(V) \xleftrightarrow{1:1} L_2^+(V) \xleftrightarrow{1:1} SM_n(F)$$

$$q \longmapsto f(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(q(\vec{x}+\vec{y}) - q(\vec{x}) - q(\vec{y})) \longmapsto A = (f(\vec{e}_i, \vec{e}_j))_{n\times n}$$

$$q(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x}) \longleftarrow f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^t A \vec{y} \longleftarrow A = (a_{ij})_{n\times n}$$

q在给定基下的矩阵. 规范基. 规范型等概念与对称双线性型类似.

eg: V是$\mathbb{C}$上n维线性空间.

$A \in SM_n(\mathbb{C})$. $rank(A) = r$, 则 $A \sim_c \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

V上二次型q的规范型是 $x_1^2 + \cdots + x_r^2$. $r = rank(q)$

V上对称双线性型f的规范型 $x_1y_1 + \cdots + x_ry_r$, $r = rank(f)$

九. 实二次型.

Thm: $char F \neq 2$. $\forall A \in SM_n(F)$. $\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_r \in F \setminus \{0\}$. s.t. $A \sim_c \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$, $r = rank(A)$

$F = \mathbb{C}$. $A \sim_c \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$F = \mathbb{R}$. $A \sim_c \begin{pmatrix} E_k & 0 & 0 \\ 0 & -E_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $k + l = r$. k: 正惯性指数

l: 负惯性指数

签名 (k, l)

prop: ① $A, B \in SM_n(\mathbb{C})$. $A \sim_c B \iff rank(A) = rank(B)$

② $A, B \in SM_n(\mathbb{R})$. $A \sim_c B \iff A, B$有相同签名

下面假设 V 是 $\mathbb{R}$ 上 n 维线性空间.

(半)正定二次型:

1. q 是 V 上二次型. 签名 (k,l).

Def: 半正定: $\forall \vec{x}\in V$, $q(\vec{x})\geq 0$. $\Leftrightarrow$ $l=0$

正定: $\forall \vec{x}\in V\setminus\{\vec{0}\}$, $q(\vec{x})>0$. $\Leftrightarrow$ $k=n$

半负定: $\forall \vec{x}\in V$, $q(\vec{x})\leq 0$. $\Leftrightarrow$ $k=0$

负定: $\forall \vec{x}\in V\setminus\{\vec{0}\}$, $q(\vec{x})<0$. $\Leftrightarrow$ $l=n$.

不定: 不是半正定,不是半负定. $\Leftrightarrow$ $k>0, l>0$.

2. q 是 V 上二次型. 签名 (k,l). $q=\vec{x}^tA\vec{x}$. $A\in SM_n(\mathbb{R})$.

① q 半正定 $\Leftrightarrow$ A 半正定 $\Leftrightarrow$ $l=0$ $\Leftrightarrow$ $\exists B\in M_n(\mathbb{R})$ s.t. $A=B^tB$.

$\Leftrightarrow$ $\forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{x}^tA\vec{x}\geq 0$

② q 正定 $\Leftrightarrow$ A 正定 $\Leftrightarrow$ $k=n$ $\Leftrightarrow$ $\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $A=P^tP$.

$\Leftrightarrow$ $\forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\}$, $\vec{x}^tA\vec{x}>0$ $\Leftrightarrow$ A 的所有顺序主子式 >0

$\Leftrightarrow$ A 的所有主子式 >0.

③ q (半)正定 $\Leftrightarrow$ $-q$ (半)负定. $A\in SM_n(\mathbb{R})$. A (半)正定 $\Leftrightarrow$ $-A$ (半)负定.

④ $A\in SM_n(\mathbb{R})$. $\Delta_1,\cdots,\Delta_n$ 是 A 顺序主子式. A 负定 $\Leftrightarrow$ $(-1)^k\Delta_k>0$. $k=1,2,\cdots,n$.

3 (半)正定二次型 其他它性质.

① $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 则 $A^tA\in SM_n(\mathbb{R})$ 半正定且 $\mathrm{rank}(A^tA)=\mathrm{rank}(A)$.

② A 正定矩阵, 则 (i). $\det(A)>0$, A^{-1} 也正定, A^2 也正定.

(ii) $\det(A)$ 不大于 A 的对角线上元素之积