定理：设 $A, B \in SM_n(\mathbb{R})$ 半正定

则 $\exists\, P \in GL_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P^tAP = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad P^tBP \text{ 是对角的}$$

引理1 设 $M \in SM_n(\mathbb{R})$ 半正定，$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ 则 $\vec{x}^tM\vec{x} = 0 \Leftrightarrow M\vec{x} = \vec{0}$

证：$\because M$ 半正定 $\therefore \exists\, N \in M_n(\mathbb{R})$

$$M = N^tN$$

$$\Rightarrow \vec{x}^tM\vec{x} = \vec{x}^tN^tN\vec{x}$$

$$= (N\vec{x})^t(N\vec{x})$$

于是 $\boxed{\vec{x}^tM\vec{x} = 0 \Leftrightarrow N\vec{x} = \vec{0}}$ (*)

"$\Leftarrow$" 显然

"$\Rightarrow$" $\vec{x}^tM\vec{x} = 0 \xRightarrow{(*)} N\vec{x} = \vec{0}$

$$\Rightarrow N^tN\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow M\vec{x} = \vec{0}$$

引理2 设 V 是 F 上的 n 维线性空间 ①

U, W 是 V 的子空间且 $V = U + W$ ①

则 $\exists$ 子空间 $U_0 \subset U$ 使得

$$V = U_0 \oplus W$$

证：设 $\vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_k$ 是 $U \cap W$ 的基

将其扩充为 U 的一组基

$$\vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_k, \vec{\varepsilon}_{k+1}, \dots \vec{\varepsilon}_m$$

令 $U_0 = \langle \vec{\varepsilon}_{k+1}, \dots \vec{\varepsilon}_m \rangle$ 即可.

定义：设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 维线性空间，f 是 V 上的对称双线性型满足 $\Phi(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$ 是 V 上的半正定二次型. 记

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = [\vec{x} | \vec{y}]$$

则称 $(V, [\ |\ ])$ 为半正定内积空间

定义：设 $\vec{x},\vec{y}\in V$. 如果 $[\vec{x}|\vec{y}]=0$. 则称 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 正交. 记为 $\vec{x}\perp\vec{y}$.

如果 $[\vec{x}|\vec{x}]=0$, 则称 $\vec{x}$ 迷向

引理3：设 $\vec{x}\in V$ 是迷向的，$\vec{y}\in V$ 则 $\vec{x}\perp\vec{y}$，这里 V 是半正定内积空间。

证：设 $\vec{e}_1,\dots\vec{e}_n$ 是 V 的基，定则

$$G=\left([\vec{e}_i|\vec{e}_j]\right)_{n\times n}$$ 是半正定的

令 $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+\cdots+x_n\vec{e}_n$

$\vec{y}=y_1\vec{e}_1+\cdots+y_n\vec{e}_n$

$\cancel{① \Rightarrow}$ $[\vec{y}|\vec{x}]=(y_1\cdots y_n)\,G\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

$0=[\vec{x}|\vec{x}]=(x_1\cdots x_n)\,G\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

由引理1 $G\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow[\vec{y}|\vec{x}]=0$ □

引理4. 设 V 是半正定内积空间 U 是 V 的子空间. 则

(i) $U^{\perp}:=\{\vec{x}\in V \mid \forall\vec{u}\in U,\ \vec{x}\perp\vec{u}\}$ 是子空间

(ii) $V=U+U^{\perp}$

证：(i) $\cancel{U^{\perp}=\ker(\vec{x}|\vec{u})}$ 设 $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ $\vec{w}_1,\vec{w}_2\in U^{\perp}$. 则 $\forall\vec{u}\in U$

$[\alpha_1\vec{w}_1+\alpha_2\vec{w}_2|\vec{u}]=\alpha_1[\vec{w}_1|\vec{u}]+\alpha_2[\vec{w}_2|\vec{u}]=0\Rightarrow\alpha_1\vec{w}_1+\alpha_2\vec{w}_2\in U^{\perp}$.

(ii) 令 $g:\ U\times U\longrightarrow\mathbb{R}$, $(\vec{x},\vec{y})\longmapsto[\vec{x}|\vec{y}]$

则 $\cancel{g(\vec{x},\vec{x})}$ $g(\vec{x},\vec{x})=[\vec{x}|\vec{x}]\geq 0$

故 $\exists$ U 的一组基 $\vec{\varepsilon}_1,\dots\vec{\varepsilon}_d$ 使得

$$\left(g(\vec{\varepsilon}_i,\vec{\varepsilon}_j)\right)_{d\times d}=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$$

设 $\vec{x}\in V$, $\vec{y}=[\vec{x}|\vec{\varepsilon}_1]\vec{\varepsilon}_1+\cdots+[\vec{x}|\vec{\varepsilon}_d]\vec{\varepsilon}_d\in U$

断言: $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y} \in U^{\perp}$

断言的证明: $\forall i \in \{1,2,\dots r\}$

$$[\vec z|\vec\varepsilon_i] = [\vec x|\vec\varepsilon_i] - [\vec y|\vec\varepsilon_i]$$

$$= [\vec x|\vec\varepsilon_i] - \left[\sum_{j=1}^{d} [\vec x|\varepsilon_j]\vec\varepsilon_j \,\middle|\, \vec\varepsilon_i\right]$$

$$= [\vec x|\vec\varepsilon_i] - \sum_{j=1}^{d} [\vec x|\varepsilon_j][\vec\varepsilon_j|\vec\varepsilon_i]$$

$$= [\vec x|\vec\varepsilon_i] - [\vec x|\vec\varepsilon_i] = 0$$

$\forall i \in \{r+1,\dots d\}$ $\vec\varepsilon_i$ 迷向

由引理3 $[\vec z|\vec\varepsilon_i] = 0$

故 $\vec z \perp \vec\varepsilon_i$, $i=1,2,\dots d$

$\Rightarrow \vec z \in U^{\perp}$ ~~由~~ 断言成立

~~由~~ 由断言可知: $\vec x = \vec z + \vec y \in U + U^{\perp} \Rightarrow V = U + U^{\perp}$ □

推论1. 设 V 是半正定内积空间 $U \subset V$ 是子空间. 则 $\exists$ 子空间 $W \subset U^{\perp}$ 使得 $V = U \oplus W$

证: 由引理4可知

$$V = U + U^{\perp}$$

由引理2可知 $\exists\, W \subset U^{\perp}$ 使得 $V = U \oplus W$. □

定理的证明

把 $\mathbb{R}^n$ 看成半正定内积空间, 其中 $\forall \vec x, \vec y \in \mathbb{R}^n$

$$[\vec x|\vec y] = \vec x^{t} B \vec y$$

设 $U = \{\vec x \in \mathbb{R}^n \mid \vec x^{t} A \vec x = 0\}$

由引理1, U 是 $A\vec x = \vec 0$ 的解空间

根据推论1 $\exists W \subset U^{\perp}$ 使得

$$\mathbb{R}^n = U \oplus W$$

设 $g_A: W \times W \to \mathbb{R}$
$(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x}^t A \vec{y}$

则 g_A 是对称双线性的，且对应的二次型半正定。如果 $\vec{x} \in W$

使得 $g_A(\vec{x}, \vec{x}) = 0$

则 $\vec{x}^t A \vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{x} \in U$.

$\because U \cap W = \{\vec{0}\}$ $\therefore \vec{x} = \vec{0}$

故 ~~g_A~~ 以 g_A 为矩阵的二次型在 W 上正定。

类似 $g_B: W \times W \to \mathbb{R}$
$(\vec{x}, \vec{y}) \to \vec{x}^t B \vec{y}$

是对称双线性。

由第六章定理6.6 $\exists W$ 的一组基 $\vec{e_1}, \dots \vec{e_r}$ 使得

$(g_A(\vec{e_i}, \vec{e_j})) = E_r$

$(g_B(\vec{e_i}, \vec{e_j}))$ 对角阵

设 $h_A: U \times U \to \mathbb{R}$
$(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x}^t A \vec{y}$

则 $h_A(\vec{x}, \vec{x}) = \vec{x}^t A \vec{x} = 0$ [U 的定义]

故 h_A 在 U 的任意基下的矩阵是

$$O_{(n-r) \times (n-r)}$$

设 $h_B: U \times U \to \mathbb{R}$
$(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x}^t B \vec{y}$ 对称双线性

则 $\exists U$ 的一组基 $\vec{e}_{r+1}, \dots \vec{e}_n$ 下的矩阵是对角的

设 f_A: ~~$\mathbb{R}^n \times$~~ $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x}^t A \vec{y}$

f_B 类似

$\forall i, j \in \{1, \dots r\}$
$(f_A(\vec{e_i}, \vec{e_j})) = (g_A(\vec{e_i}, \vec{e_j})) = E_r$

$\forall i, j \in \{r+1, \dots n\}$,

$(f_A(\vec e_i,\vec e_j)) = (h_A(\vec e_i,\vec e_j)) = O_{(n-r)\times(n-r)}$

又 $\forall j \in \{r+1,\dots n\}$

$\vec e_j^{\,t} A \vec e_j = 0 \Rightarrow A\vec e_j = 0$ [引理1]

$\Rightarrow \forall i \in \{1,\dots r\}\quad \vec e_i^{\,t} A \vec e_j = 0$

$\Rightarrow f_A(\vec e_i,\vec e_j) = 0 \Rightarrow f_A(\vec e_j,\vec e_i) = 0$

故: $(f_A(\vec e_i,\vec e_j))_{n\times n} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$

$\forall i,j \in \{1,\dots r\}\quad (f_B(\vec e_i,\vec e_j)) = diag(\lambda_1 \dots \lambda_r)$

$\lambda_1,\dots\lambda_r \in \mathbb{R}$

$\forall i,j \in \{r+1,\dots n\}$

$(f_B(\vec e_i,\vec e_j)) = diag(\lambda_{r+1},\dots\lambda_n)$

$\forall i \in \{1,\dots r\}.\quad j \in \{r+1,\dots n\}$

$f_B(\vec e_i,\vec e_j) = [\underbrace{\vec e_i}_{\in W} \mid \underbrace{\vec e_j}_{\in U}] = 0$

$W \leftarrow U^\perp$

$\Rightarrow (f_B(\vec e_i,\vec e_j)) = diag(\lambda_1 \dots \lambda_r\, \lambda_{r+1} \dots \lambda_n)$ 对角矩阵

令 $P = (\vec e_1,\dots \vec e_n)$

5

$P^t A P = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$P^t B P = diag(\lambda_1,\dots\lambda_n)$ $\square$