习题 1 设 $f_i(x), i=1,2,3,4$ 为关于自变量 x 可导的函数. 证明:

$$(\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_3(x) & f_4(x) \end{vmatrix})' = (\begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2(x) \\ f_3'(x) & f_4(x) \end{vmatrix}) + (\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2'(x) \\ f_3(x) & f_4'(x) \end{vmatrix})$$

习题 2 令 A 为一有限集, f 为 A 上一个映射. 证明: f 为单射当且仅当 f 为满射.

习题 3 设 $f: A \to B$ 是集合的映射 (A, B 是非空集合), 证明:

1. f 为单射 $\iff$ 存在 $g: B \to A$, 使得 $gf = 1_A$.
2. f 为满射 $\iff$ 存在 $h: B \to A$, 使得 $fh = 1_B$.

习题 4 对有限集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 证明:

$$\begin{aligned} |\cup_{i=1}^n A_i| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| \\ &+ \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \end{aligned}$$

(hint: 用数学归纳法.)

习题 5

1. 对于映射 $f: X \to Y$ 和 $A, B \subset X$, 证明

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

2. 对于映射 $f: X \to Y$ 和 任意 $A, B \subset X$, 证明

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

等号当且仅当 f 为单射时取到.