习题 1 令 S 为非空集合， R 为 S 上一个二元关系. 证明： R 为等价关系当且仅当

(1). $(\forall a \in S)\ a\,R\,a$;

(2). $a\,R\,b$ 且 $b\,R\,c \Longrightarrow\ c\,R\,a$.

习题 2 令 S, T 为两个非空的集合, 且 $|S| = m, |T| = n$. 问

(1) S 到 T 可建立多少个映射?

(2) S 到 T 可建立满射、 单射、 双射 的条件各是什么？各能建立多少个？

习题 3 设 $x \in (0,1)$,证明 $f(x) = \tan(\pi(x - \frac{1}{2}))$ 为 $(0,1)$ 区间到实数轴的一个双射.

习题 4 设 $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$,

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,2\pi] & \longrightarrow & C \\ & \theta & \longmapsto & (\cos\theta, \sin\theta) \end{array}$$

且 $\sim_f$ 是由映射 f 诱导的等价关系*(见第三讲定理 5.17 (i))*.

证明：

(1) $\forall \alpha \in (0, 2\pi)$, 关于 $\sim_f$ 的等价类 $\bar{\alpha} = \{\alpha\}$.

(2) $\bar{0} = \{0, 2\pi\}$.

(注：该习题说明 $[0,2\pi]/\sim_f$ 把 $[0,2\pi]$ “粘合”成一个圆.)

习题 5 计算置换的乘积：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.