第三次作业

1. 找出 $\mathbb{R}^5$ 中子空间 $\langle u_1, u_2, u_3\rangle$ 和子空间 $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ 的和与交的一组基, 其中

$$u_1 = (-1, 6, 4, 7, -2)^t, u_2 = (-2, 3, 0, 5, -2)^t, u_3 = (-3, 6, 5, 6, -5)^t,$$
$$v_1 = (1, 1, 2, 1, -1)^t, v_2 = (0, -2, 0, -1, -5)^t, v_3 = (2, 0, 2, 1, -3)^t.$$

2. 在 $\mathbb{R}^4$ 中,取向量组 $x = (1, -1, 1, 1)^t, y = (2, 1, 0, 1)^t$, 子空间. 设

$$V = \langle x, y\rangle.$$

试求商空间 $\mathbb{R}^4/V$的一组基.

3. 设 V, W 是域 F 上的两个有限维线性空间. 证明:

$$\dim(V \times W) = \dim(V) + \dim(W).$$

4. 设齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}_m$, 其中 $A \in F^{m\times n}, \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ 和 $\mathbf{0}_m$ 是 F^m 中的零向量. 令 $B \in F^{k\times n}$, 且新的方程组为

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}_m$$

设这两个方程组的解空间分别是 U 和 V.证明:

$$\dim(V) \geq \dim(U) - k.$$

5. 设 $A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times m}$. 证明:

$$m - \mathrm{rank}(E_m - AB) = n - \mathrm{rank}(E_n - BA).$$

(如果用矩阵分块，参见科斯特利金第一卷 p. 103, 练习 9 的提示).

6. (思考题) 设$A, B \in \mathrm{M}_n(F)$ 且 $AB = BA$. 证明:

$$\mathrm{rank}(A + B) + \mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B).$$

(思考利用矩阵分块的方法来证明.)