第四次作业

1. 设 K 是特征等于零的域, 在 K^3 中, 设

$$\alpha_1 = (1, 0, -1)^t,\ \alpha_2 = (2, 1, 1)^t,\ \alpha_3 = (1, 1, 1)^t,$$

和

$$\beta_1 = (0, 1, 1)^t,\ \beta_2 = (-1, 1, 0)^t,\ \beta_3 = (1, 2, 1)^t.$$

且 $\alpha = (2, 5, 3)^t$。

(i) 求基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的转换矩阵.

(ii) 求 α 分别在这两个基下的坐标.

2. 设 $\mathbb{R}[x]^{(n)} = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(f) < n\}$, 其中 $n > 1$. 设:

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{R}[x]^{(n)} & \longrightarrow & \mathbb{R}[x]^{(n)} \\ & f & \longmapsto & f''. \end{array}$$

(i) 验证 φ 是线性映射,并求其在基底 $1, x, \ldots, x^{n-1}$; $1, x, \ldots, x^{n-1}$ 下的矩阵.

(ii) 试问: $\ker(\varphi) + \mathrm{im}(\varphi)$ 是不是直和? 并说明理由.

3. 设 V 是 F 上的有限维线性空间, $f, g \in V^* \setminus \{0^*\}$. 证明: $\ker(f) = \ker(g)$ 当且仅当存在 $\lambda \in F$ 使得$f = \lambda g$.

4. 设 $\mathbb{R}^3$上的双线性型由公式 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 5x_1y_2 - 3x_3y_1 + x_3y_3$ 定义, 其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^t$. 求 f 在标准基下的矩阵.

5. 设 V_1, V_2, V_3 是线性空间 V 的三个 k 维子空间,其中 $k > 1$. 设

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_2 \cap V_3) = \dim(V_3 \cap V_1) = k - 1.$$

(i) 证明: $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_2 + V_3) = \dim(V_3 + V_1) = k + 1$.

(ii) (选做) 证明: 或者

$$\dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = k - 1,$$

或者

$$\dim(V_1 + V_2 + V_3) = k + 1.$$