第五次作业

1. 设 V 是域 F 上的线性空间，分别用 $\mathcal{L}_2(V)$, $\mathcal{L}_2^+(V)$, $\mathcal{L}_2^-(V)$ 代表 V 上所有双线性型、对称双线性型和斜对称双线性型的集合. 验证：

   (1) $\mathcal{L}_2(V)$ 是 F 上的线性空间；

   (2) $\mathcal{L}_2^+(V)$, $\mathcal{L}_2^-(V)$ 是 $\mathcal{L}_2(V)$ 上的子空间；

   (3) 当 F 的特征不等于 2 时，$\mathcal{L}_2(V) = \mathcal{L}_2^+(V) \oplus \mathcal{L}_2^-(V)$.

2. 设

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathrm{M}_2(F) \times \mathrm{M}_2(F) & \longrightarrow & F \\ & (A, B) & \longmapsto & \mathrm{tr}(AB). \end{array}$$

   (1) 验证 f 是 $\mathrm{M}_2(F)$ 上的对称双线性型；

   (2) 求 f 在基底 $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}$ 下的矩阵，并求 $\mathrm{rank}(f)$.

3. 设

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}[x]^{(n)} \times \mathbb{R}[x]^{(n)} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (p, q) & \longmapsto & \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x. \end{array}$$

   (1) 验证 f 是 $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 上的对称双线性型；

   (2) 求 f 在基底 $1, x, \ldots, x^{n-1}$ 下的矩阵，并求 $\mathrm{rank}(f)$.

4. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   计算 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ 和对角矩阵 B 使得 $P^t A P = B$.