第六次作业

1. 设 $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 - 3x_2x_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上二次型.

   (1) 计算 q 在 $\mathbb{R}^3$ 的标准基下的矩阵和秩；

   (2) 计算 q 的一组规范基和在该基下的规范型，并计算 q 的签名.

2. 求实二次型 $q(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \cdots + x_{2n-1}x_{2n}$ 的签名.

3. 设 F 是域且

$$A = \begin{pmatrix} O_{n\times n} & O_{n\times m} \\ O_{m\times n} & A_1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} O_{n\times n} & O_{n\times m} \\ O_{m\times n} & B_1 \end{pmatrix}$$

   是 $\mathrm{M}_{n+m}(F)$ 中矩阵，其中 A_1, $B_1 \in \mathrm{GL}_m(F)$. 证明：$A \sim_c B$ 当且仅当 $A_1 \sim_c B_1$.

4. 设 q 是 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 中非零齐二次多项式. 证明：如果 q 做为二次型的秩不高于 2，则 q 可以写成两个齐次多项式之积.
   (注：结合课上讲义例 8.11，上述结论成立说明：q 在 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 中可约当且仅当 $\mathrm{rank}(q) \leq 2$.)

5. (选做)设 q 是 $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 中非零齐二次多项式. 证明：q 在 $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 中可约当且仅当或者 $\mathrm{rank}(q) \leq 1$ 或者 q 的签名是 $(1, 1)$.