

# 第七次作业

1. 举例说明:

- (1) 正定矩阵  $(a_{i,j})$  可以在某些  $(i,j)$  处的值  $a_{i,j}$  是负的;
- (2) 实对称矩阵  $A = (a_{i,j})$  所有的值都是正的, 但  $A$  可以不是正定的.

2. 实二次型

$$\lambda x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

在  $\lambda$  取什么值时是负定的.

3. 设  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . 证明:

- (1)  $A$  为斜对称矩阵当且仅当对任意的  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} = 0$ ;
- (2) 若  $A$  为对称矩阵且对任意的  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} = 0$ , 则  $A = O$ .

4. 设  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . 证明:

- (1)  $q(A) = \text{tr}(A^t A)$  为  $M_n(\mathbb{R})$  上的正定二次型;
- (2) 若  $A^t A = A^2$ , 则  $A$  是对称矩阵.

5. (选做) 设  $A$  是任意一个实对称矩阵,  $\varepsilon = \varepsilon(A)$  是个充分小的实数, 证明: 矩阵  $B = E + \varepsilon A$  是正定的.