第八次作业

1. 设 V 和 W 是域 F 上有限维线性空间，V 的一组基是 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$，$W$ 的一组基是 ϵ_1, ϵ_2，且线性映射 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 由

$$\phi(\mathbf{e}_1) = \epsilon_1 - \epsilon_2,\ \phi(\mathbf{e}_2) = \epsilon_1 + \epsilon_2,\ \phi(\mathbf{e}_3) = \epsilon_2 - 2\epsilon_1$$

确定.

(1) 求 ϕ 在上述基底下的矩阵；

(2) 求 $\mathrm{rank}(\phi)$ 和 $\ker(\phi)$ 的一组基；

(3) 设

$$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2,\ \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3,\ \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1; \quad \mathbf{w}_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2,\ \mathbf{w}_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2.$$

验证 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 是 V 的一组基，$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 是 W 的一组基，并求 ϕ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3; \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 下的矩阵.

2. 用 Jacobi 公式计算 $\mathbb{R}^n$ 上二次型

$$q_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

的规范型和签名.

3. 设 V 是实数域上有限维线性空间，q 是 V 上二次型. 设存在 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 使得 $q(\mathbf{u}) > 0$ 和 $q(\mathbf{v}) < 0$. 证明：存在 $\mathbf{w} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ 使得 $q(\mathbf{w}) = 0$，且 q 是满射.

4. 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 正定. 证明：对于任意 $m \in \mathbb{Z}$，A^m 正定.

5. (选做)设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 正定. 证明：$\det(A)$ 等于 A 的对角线上元素之积当且仅当 A 是对角矩阵.
提示：可以用归纳法，参考李老师第一章第六次习题课讲义命题 3.1.