第五次作业

1. 用数学归纳法证明：如果 p 是素数，那么对任何整数 n 都有 $n^p - n$ 被 p 整除.
   （提示：用二项式定理和第五周讲义例7.17）

2. 判断 $\mathbf{v}_3$ 是否是 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 的线性组合：

   (1)
   $$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

   (2)
   $$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

3. 设
   $$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 19 \\ 18 \\ 17 \end{pmatrix},$$
   证明 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 两两线性无关，但是 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 线性相关.

4. 证明 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^n$ 线性无关当且仅当 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$ 也线性无关.

5. 设 $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ 且 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性无关. 再设
   $$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k,$$
   其中 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, 且 $\alpha_1 \neq 0$. 证明: $\mathbf{u}, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性无关.

6. 设 V, V_1, V_2 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 举例说明“分配律”:
   $$V \cap (V_1 + V_2) = V \cap V_1 + V \cap V_2 \tag{1}$$
   一般不成立 (提示：举例时可以考虑 $n = 2$ 的情形，此时 $\mathbb{R}^2$ 的非平凡的子空间就是过原点的直线); 并证明当 $V_1 \subset V$ 时, (1) 成立.