第十次作业

1. 计算特征多项式并求出复特征值和特征向量:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{-}\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. 证明: 域 F 上的两个同阶方阵 A, B 中如果有一个是非退化的，那么 AB 和 BA 相似.
   举例说明如果 A, B 都是退化的，则 AB 和 BA 可以不相似.

3. 设 $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ 是向量空间 V 上的线性算子. 证明: 如果 $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$, 那么对任意的 $\lambda \in F$, $ker(\lambda\mathcal{E} - \mathcal{A})$ 是 $\mathcal{B}$ 的不变子空间.

4. 证明: 如果 $\mathcal{A}$ 是可逆线性算子，那么 $\mathcal{A}$ 的不变子空间也是 $\mathcal{A}^{-1}$ 的不变子空间. 特别,$\mathcal{A}$ 的特征向量也是 $\mathcal{A}^{-1}$ 的特征向量.

5. 设 $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$ 是一个线性算子，它对某个自然数 p 由 $Im\mathcal{A}^p = Im\mathcal{A}^{p+1}$. 证明: 在这种情形 $V = Ker\mathcal{A}^p \oplus Im\mathcal{A}^p$ 是 $\mathcal{A}$ 的两个不变子空间的直和.