第十二周作业

注：本次作业共六道题.

1. 求 A^m(m 是任一整数)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(可参照上课讲义例 9.10)

2. 计算:

(1) 设有理数域上的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

是否可以对角化? 如果可以，求可逆矩阵 $P \in M_3(\mathbb{Q})$ 使得 $P^{-1}AP$ 是对角阵,

(2) 设复数域上的矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ -2 & -4 & 2 \\ -4 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

是否可以对角化? 如果可以，求可逆矩阵 $P \in M_3(\mathbb{C})$ 使得 $P^{-1}BP$ 是对角阵.

3. 证明:

(1) 幂零矩阵一定有特征值, 并且它的特征值一定是 0,

(2) 不为零矩阵的幂零矩阵不能对角化.

4. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ 在标准基下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

计算 $\mathbb{R}[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$ 的一组基.

5. 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L}(V)$,$\mathcal{A}$ 是循环算子, $\mathcal{AB}=\mathcal{BA}$. 证明:$\mathcal{B}\in F[\mathcal{A}]$

[选做]

6. 设 $A=(a_{ij})$ 是数域 F 上的 n 级上三角矩阵. 证明：

   (1) 如果 $a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}$ 两两不等，那么 A 可对角化,

   (2) 如果 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$, 并且至少有一个 a_{kl} 不为零（$(k<l)$, 那么 A 不能对角化.