第十三周作业

1. (1) 验证矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

有相同的特征多项式;

(2) 求出它们的极小多项式;

(3) 求出它们的 Jordan 标准型.

2. 计算 $J_n(\lambda)$ 的极小多项式, 特征多项式和 $J_n(\lambda)^k$, 其中 $k \in \mathbb{N}$ 并证明如果 $n > 1$, 则对任意 $\lambda \in \mathbb{C}, J_n(\lambda)$ 不可对角化.

3. (1) 已知道 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}} = (t-3)^4(t+2)$ 且 $\mathrm{rank}(\mathcal{A} - 3\mathcal{E}) = 2$, 求出 $J_{\mathcal{A}}$;

(2) 在 $\mathrm{rank}(\mathcal{A} - 3\mathcal{E}) = 1, 3, 4$ 的情形, 能唯一地复原 $J_{\mathcal{A}}$ 吗?

4. 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间,$\mathcal{A}$ 为 V 上的线性算子. 证明: 若 V 的某个循环子空间可以分解成两个 $\mathcal{A}-$ 子空间的直和, 则这两个 $\mathcal{A}-$ 子空间也是循环子空间.

5. 对于矩阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 关系式 $A^N = E$ 成立, 当且仅当 A 可以对角化同时它的特征值都是 N 次单位根.

[选做]

6. 设 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_m \in \mathcal{L}(V)$ (V 是域 F 上 n 维线性空间), 证明: 如果 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_m$ 都可对角化, 且它们两两可交换, 那么 V 中存在一组基，使得 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_m$ 在此基下的矩阵都是对角阵.