第十四次作业

1. 计算下列二阶复矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1+\lambda_2 \end{pmatrix}$$

   的 Jordan 标准型(提示: 需要对 λ_1, λ_2 的取值分情况讨论).

2. 计算下列复数域上矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

   的 Jordan 标准型.

3. 设复方阵 A 的特征多项式

$$\chi_A = (t-1)^4(t+1)^3t^2,$$

   极小多项式

$$\mu_A = (t-1)^3(t+1)^3t^2.$$

   计算 J_A.

4. 设幂零矩阵 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 满足 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$ 且 $\mu_A = \mu_B$.

   (i) 证明: 当 $n = 4$ 时, $A \sim_s B$.

   (ii) 当 $n = 5$ 时, $A \sim_s B$ 是否成立? 并说明你的结论.

5. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. 证明: 存在可对角化矩阵 S 和 幂零矩阵 N 使得

$$A = S + N.$$

6. 证明: $J_n(1) \sim_s J_n(1)^k$, 其中 $k \in \mathbb{Z}^+$.