

第六次作业

1. 设

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{R}^3$ 中的向量, 证明以下结论:

(1) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 线性无关;

(2) $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, 并且计算出 $\mathbf{v}$ 在基 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 下的系数;

(3) 将 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 扩充成 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

2. 设 $V, W \subset \mathbb{R}^n$ ($n > 1$) 是子空间, 并且 $V \neq W$ 和 $\dim(V) = \dim(W) = n - 1$, 证明

$$\dim(W + V) = n \text{ 和 } \dim(W \cap V) = n - 2.$$

3. 设 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, 求下列矩阵的秩:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 7 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

4. 令 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 且 $B \in \mathbb{R}^{(m+1) \times n}$ 是 A 增加一行得到的矩阵. 设 A 的行向量为 $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_m$, B 的行向量为 $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_m, \vec{A}_{m+1}$. 证明以下结论:

(1) 记 $V_r(A) = \langle \vec{A}_1, \dots, \vec{A}_m \rangle$, $V_r(B) = \langle \vec{A}_1, \dots, \vec{A}_m, \vec{A}_{m+1} \rangle$, 证明

$$V_r(B) = V_r(A) + \langle \vec{A}_{m+1} \rangle.$$

(2) 已知 $\text{rank}(A) = \dim(V_r(A))$, $\text{rank}(B) = \dim(V_r(B))$, 证明

$$\text{rank}(B) = \text{rank}(A) \text{ 或者 } \text{rank}(B) = \text{rank}(A) + 1.$$

(这个结论说明: 在矩阵中添加一行, 矩阵的秩要么不变, 要么增加1)

(3) 设 $\text{rank}(A) = k$, 且 A_s 是 A 的任意 s 行组成的矩阵, 证明

$$\text{rank}(A_s) \geq k + s - m,$$

其中 $k, s \leq m$.

提示: 证明 (2) 时可以用第六周讲义命题2.14; 证明 (3) 时可以用 (2) 的结论并且考虑矩阵增加 $m - s$ 行的情形, 或者直接用第六周讲义命题2.14证明. 提示只是给大家提供一种思路, 当然大家也可以用其他的证明方法.