

第十五次作业

1. 设标准欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的标准基是 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. 计算 $\|\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_n\|$.

2. 设 $V = \mathbb{R}[x]^{(3)}$ 是欧式空间, 其中内积是

$$(f|g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

计算 x 的长度和从 1 到 x^2 的距离.

3. 设 V 是欧式空间, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. 证明:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2.$$

4. 设 V 是欧式空间, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in V$.

(i) 设 $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{v}_m$, $\mathbf{y} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_m \mathbf{v}_m$. 证明:

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}.$$

(ii) 设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, $\mathbf{x} \in V$. 证明: $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 当且仅当 $(\mathbf{x}|\mathbf{e}_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

5. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 证明:

(i) A 是幂零矩阵当且仅当 J_A 是幂零矩阵.

(ii) A 是幂零矩阵当且仅当 $\text{tr}(A^k) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.