第十六次作业

在下述习题中, V 是有限维欧式空间, $\mathbb{R}^n$ 是标准欧式空间.

1. 设 $\mathbf{w}_1=(1,0,1,0)^t, \mathbf{w}_2=(1,1,1,1)^t$ 在 $\mathbb{R}^4$ 中. 计算 $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle^\perp$ 的一组单位正交基.

2. 设 $\mathbb{R}^5$ 中的子空间 W 是系数矩阵为
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
的齐次线性方程组的解空间. 计算 $W^\perp$ 的一组单位正交基.

3. 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 子空间 $W=\langle (1,0,0)^t, (1,2,1)^t \rangle$. 再设 $\mathbf{v}=(1,1,1)^t$. 计算 $\mathbf{v}$ 到 W 的距离和 $\mathbf{v}$ 与 W 的夹角(即 $\mathbf{v}$ 与其在 W 上正交投影的夹角).

4. 设 U, W, W_1 和 W_2 是 V 的子空间. 证明:

   (i) 如果 $U \subset W$, 则 $U^\perp \supset W^\perp$;

   (ii) $(W_1+W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$;

   (iii) (选做) $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

5. 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$ 且 $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$ 的夹角都是 $\frac{\pi}{3}$, $i, j \in \{1,2,\ldots,m\}$, $i \neq j$. 证明: $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ 线性无关.

6. (复习) 设 F 是域, 矩阵 $A \in \mathrm{GL}_n(F)$. 证明: $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$. 特别地, 当 A 是(斜)对称时, A^{-1} 也是(斜)对称的.