第十七次作业

在下述习题中, V 是有限维欧式空间, $\mathbb{R}^n$ 是标准欧式空间.

1. 设 $\mathbf{v} \in V$ 是单位向量. 令

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & V & \longrightarrow & V \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v} \end{array}.$$

   (i) 验证: $\mathcal{A}$ 是线性算子;

   (ii) 证明: $\mathcal{A}$ 是正交算子;

   (iii) 计算 $\mathcal{A}$ 的所有特征根.

2. 设对称实矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

   已知特征多项式 $\chi_A(t) = (t-10)(t-1)^2$.

   (i) 计算正交矩阵 P 和对角矩阵 D 使得 $D = P^t AP$;

   (ii) 计算 A^k, 其中 $k \in \mathbb{Z}$.

3. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 是正规矩阵，E 代表 n 阶单位阵. 证明: $E + A$ 也是正规矩阵.

4. 设 $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 证明: 如果 A 是上三角矩阵, 则 A 是对角矩阵且对角线上的元素为 ± 1.

5. 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 且 λ 是 A 的最大的特征值. 证明: 对任意向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$(A\mathbf{x}|\mathbf{x}) \leq \lambda(\mathbf{x}|\mathbf{x})$$

   且等号成立当且仅当 $\mathbf{x} \in V^\lambda$.