

第十八次作业

在下述习题中, V 是有限维欧式空间, \mathbb{R}^n 是标准欧式空间.

1. 设 $n > 1$. 在 $M_n(\mathbb{R})$ 中, 是否存在非对角矩阵 A 使得
 - (i) A 既是对称的又是斜对称的?
 - (ii) A 既是对称的又是正交的?
 - (iii) A 既是斜对称的又是正交的?
2. 设 \mathcal{A} 是 V 上的对称算子满足 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{E}$. 证明存在 $k, \ell \in \mathbb{N}$ 和 V 的某组单位正交基, 使得 \mathcal{A} 在该基底下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} E_k & O \\ O & -E_\ell \end{pmatrix}.$$

3. 设 A 是正定矩阵, B 是斜对称矩阵. 证明: $A + B$ 可逆.
4. 设 $A \in O_n(\mathbb{R})$. 证明:
 - (i) $\det(A) = \pm 1$;
 - (ii) 如果 $\det(A) = -1$, 则 $-1 \in \text{spec}_{\mathbb{R}}(A)$;
 - (iii) 如果 $\det(A) = 1$, 能否推出 $1 \in \text{spec}_{\mathbb{R}}(A)$? 并说明你的结论.
5. 设 A, B 是正定矩阵. 证明: 如果 $A - B$ 正定, 则 $B^{-1} - A^{-1}$ 也正定.