第七次作业

1. 柯斯特利金-代数学引论（第一卷）第61页：4

2. 柯斯特利金-代数学引论（第一卷）第81页：1

3. 求齐次线性方程组 (1) 解空间的一组基和线性方程组 (2) 的全部解.

$$(1)\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-4x_4=0 \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=0 \\ x_1-2x_2+3x_3-x_4-x_5=0 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=0 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-4x_4=2 \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=1 \\ x_1-2x_2+3x_3-x_4-x_5=3 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=1 \end{cases}$$

4. 设 $\phi:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射并且是双射，ϕ^{-1} 是 ϕ 的逆映射，证明以下结论：

   (1) ϕ^{-1} 是线性映射；

   (2) $n=m$.

5. 设 $\phi:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是线性映射，并且满足对任意的 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n, \phi(\mathbf{x})\in\langle\mathbf{x}\rangle$. 证明：存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得对任意 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $\phi(\mathbf{x})=\lambda\mathbf{x}$.