第八次作业

1. 定义映射

$$\begin{array}{cccc} \phi: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

   (1) 证明 ϕ 是线性映射；

   (2) 求 ϕ 在标准基下的矩阵；

   (3) 计算 $\ker(\phi)$ 和 $\mathrm{im}(\phi)$ 的维数；

   (4) 分别计算 $\ker(\phi)$ 和 $\mathrm{im}(\phi)$ 的一组基底.

2. 求下列矩阵的乘法：

$$(1)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \quad (3)\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$$

3. 求解下列问题：

   (1) 令

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix},$$

   求矩阵 A 的秩；

   (2) 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 且 $\mathrm{rank}(A) = 1$. 证明：A 可以表示成下列形式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}$$

   其中 $x_i, i = 1, \dots, m$ 不全为 0 且 $y_j, j = 1, \dots, n$ 不全为 0；

(3) 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 且 $\operatorname{rank}(A) = r$. 证明：$A$ 可以表示成 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 中 r 个秩为 1 的矩阵的和，但不能表示成 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 中 $r-1$ 个秩为 1 的矩阵的和.

4. 设 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是线性映射，证明：

(1) $\ker(\phi) \subset \ker(\phi^2) \subset \cdots \subset \ker(\phi^m) \subset \ker(\phi^{m+1}) \subset \cdots$；

(2) $\operatorname{im}(\phi) \supset \operatorname{im}(\phi^2) \supset \cdots \supset \operatorname{im}(\phi^m) \supset \operatorname{im}(\phi^{m+1}) \supset \cdots$；

(3) (选做题)存在 $k \in \mathbb{Z}^+$ 使得

$$\ker(\phi^k) = \ker(\phi^{k+1}) = \ker(\phi^{k+2}) = \cdots$$
$$\text{且 } \operatorname{im}(\phi^k) = \operatorname{im}(\phi^{k+1}) = \operatorname{im}(\phi^{k+2}) = \cdots .$$

注：第 (3) 题为选做题，有兴趣的同学可以思考下.