

第九次作业

1. 设矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 其中 $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$. 令

$$J_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times m} \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

求矩阵乘法 $J_m A$ 和 $A J_n$.

2. 设 $a, b, c \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}^+$, 证明

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1 & ma & \frac{m(m-1)}{2}ab + mc \\ 0 & 1 & mb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. 设 $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, 若 $ABC = O$, 证明

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) + \text{rank}(C) \leq 2n.$$

4. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ 是对称矩阵, $C \in M_n(\mathbb{R})$ 是斜对称矩阵, 证明以下结论:

- (1) AB 是对称矩阵当且仅当 $AB = BA$;
- (2) 如果 A 是可逆矩阵, 则 A^{-1} 也是对称矩阵;
- (3) 如果 C 是可逆矩阵, 则 C^{-1} 也是斜对称矩阵.