

# 第十一次作业

1. 设  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $E_n$  是  $n$  阶单位阵, 计算下列矩阵

$$M = \begin{pmatrix} O_n & E_n \\ E_n & O_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_n & E_n \\ E_n & O_n \end{pmatrix}$$

并证明  $\text{rank}(M) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ .

2. 设  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $A + B, A - B$  均可逆, 证明  $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$  是可逆矩阵.

3. 计算下面的行列式

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 9 \end{vmatrix}, \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

4. 科斯特利金-代数学引论 (第一卷) 第 94 页: 3, 第 101 页: 1, 第 102 页: 6.

5. (选做题) 设  $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ , 证明 Frobenius 不等式:

$$\text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) \leq \text{rank}(ABC) + \text{rank}(B).$$

提示: 用第十周讲义引理 10.8 的结论证明.