第十六次作业

1. 设 $f(x)=\bar{2}x^2+x+\bar{4}, g=\bar{3}x^3+\bar{5}x, h=x+\bar{3}$ 为 $\mathbb{Z}_6[x]$ 中的多项式. 计算 fg, gh，并给出它们的次数.

2. 设 $f(x)=x^2+x-2=(x-1)(x+2)\in\mathbb{Z}[x]$. 分别求

$$(1)\ f(2);\quad (2)\ f(\bar{a}), \bar{a}\in\mathbb{Z}_3;\quad (3)\ f(A), A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

3. 设 F 是域，$a,b\in F, a\neq 0$. 设 $f=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0\in F[x], a_n\neq 0$. 证明 $\deg(f(x))=\deg(f(ax+b))$，并计算 $f(ax+b)$ 的首项系数.

4. 科斯特利金-代数学引论（第一卷）第 161 页：1.

5. 设 F 是域.

   (1) 设 $a,b\in F$ 且 $a\neq 0$. 证明: 映射

$$\begin{array}{rccc}\phi_{a,b}: & F[x] & \longrightarrow & F[x]\\ & p(x) & \mapsto & p(ax+b)\end{array}$$

   是从 $F[x]$ 到 $F[x]$ 的环同构.

   (2) 设 $\sigma: F[x]\longrightarrow F[x]$ 是环同构且 $\sigma|_F=\mathrm{id}_F$. 证明: 存在 $a,b\in F$ 且 $a\neq 0$ 使得 $\sigma=\phi_{a,b}$.