第十七次作业

1. 把 $f(x) = x^4 - 2x + 5, g = x^2 - x + 2$ 分别看成 $\mathbb{Z}[x]$ 和 $\mathbb{Z}_5[x]$ 中多项式，计算 $\mathrm{quo}(f, g, x)$ 和 $\mathrm{rem}(f, g, x)$.

2. 设 F 是域，$f, g, h \in F[x]$. 证明：若 $\gcd(f, h) = \gcd(g, h) = 1$，则 $\gcd(fg, h) = 1$.

3. 设 F 是域，$A \in \mathrm{M}_n(F)$ 满足 $A^2 = A$. 证明: $\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(A - E) = n$.

4. 设 F 是域，$f \in F[x]$，$A \in \mathrm{M}_n(F)$ 满足 $f(A) = O$，再设 $g \in F[x]$ 使得 $\gcd(f, g) = 1$. 证明： $g(A)$ 是可逆矩阵.

5. 设 D 是唯一因子分解整环，$a_1, \ldots, a_m, b \in D^*$. 证明: $\gcd(a_1 b, \ldots, a_m b) = \gcd(a_1, \ldots, a_m) b$.