关于 Jordan 基的计算

§1 问题和直接法

给定 $A \in M_n(\mathbb{C})$，求 J_A 和 $P \in GL_n(\mathbb{C})$，使得

$$J_A = P^{-1}AP$$

直接法

① 求 J_A

② 设 $P = (p_{ij})_{n\times n}$，其中 p_{ij} 是未知数，求解由

$$J_A P = AP \quad \text{——} \quad (H)$$

确定的关于 n^2 个未知数 p_{ij} 的齐次线性方程组 (H)

由 P 的任意性可知，方程组 (H) 有解 $\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})$ 满足 $\tilde{P} \in GL_n(\mathbb{C})$，则 $\tilde{P}$ 即为所求的一个矩阵。

该方法有一个技术问题：设解空间

$$V_H = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_m \rangle$$

其中 $\vec{v}_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$，如何在 V_H 取出 $\vec{v}$ 使得 $\det(\vec{v}) \neq 0$。

事实上，"绝大多数" V_H 中的解都对应可逆矩阵。

一种"最笨"的方法是，设 $\alpha_1, \dots \alpha_m \in \mathbb{C}$ 待定

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_m\vec{v}_m \in V_H$$

②

令 $D(\alpha_1,\dots,\alpha_m)=\det(\vec{V})\in F[\alpha_1,\dots\alpha_m]$

$\because \exists\, \tilde{\alpha}_1,\dots\tilde{\alpha}_m\in F$ 使得

$$\det(\tilde{\alpha}_1\vec{V_1}+\dots+\tilde{\alpha}_m\vec{V_m})\neq 0$$

$$\|$$

$$D(\tilde{\alpha}_1,\dots\tilde{\alpha}_m)$$

$\therefore D(\alpha_1,\dots\alpha_m)$ 是非零的关于 $\alpha_1,\dots\alpha_m$ 的多项式

我们只需取 $\tilde{\alpha}_1,\dots\tilde{\alpha}_m\in F$ 使得非零多项式 $D(\alpha_1,\dots\alpha_m)$ 代入

$$\alpha_1\to\tilde{\alpha}_1,\ \dots\ \alpha_m\to\tilde{\alpha}_m$$

非零即可.

因为 $D(\alpha_1,\dots\alpha_m)=0$ 是 $\mathbb{C}^m$ 中的一个曲面 所以"绝大多数" $\mathbb{C}^m$ 中的点 $\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_1\\ \vdots\\ \tilde{\alpha}_m\end{pmatrix}$ 都满足

$$D(\tilde{\alpha}_1,\dots\tilde{\alpha}_m)\neq 0$$

注: 直接法搞清了求 $P\in GL_n(\mathbb{C})$ 是一个线性问题 (假定 J_A 已知) 只是手算比较困难而已

下面我们再介绍一种通过 V 的 A-不可分空间直和分解来计算 P 和 J_A 的方法. 它几乎用到了全部我们讲的关于 Jordan 标准型的知识.

§2 找极大循环向量

设 V 是域 F 上有限维线性空间

定义：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果 $\vec{w} \in V$ 满足 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}$ 的维数是 V 中所有 $\mathcal{A}$-循环子空间中维数最大的，则称 $\vec{w}$ 是 V 中关于 $\mathcal{A}$ 的一个极大循环向量

由 P56 习题9（见第13次习题课讲义 习题2）

和 讲义13 命题7.2

$\vec{w}$ 是 V 中关于 $\mathcal{A}$ 的极大循环向量 $\Longleftrightarrow \mu_{\mathcal{A},\vec{w}} = \mu_{\mathcal{A}}$

此时 $\dim F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w} = \deg \mu_{\mathcal{A}}$

问题：给定 V 的一组基 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$，$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 和 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 下的矩阵 A，如何找到 V 中关于 $\mathcal{A}$ 的极大循环向量：

引理 设 $x_1, \dots, x_n \in F$ 待定

$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$

设 $\mu_{\mathcal{A}}$ 的次数为 d. 研究

$\vec{x}, \mathcal{A}\vec{x}, \dots, \mathcal{A}^{d-1}(\vec{x})$ 是否线性无关 等价于 研究

$$B(x_1, \dots, x_n) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \dots, A^{d-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)_{n\times d}$$

的秩是否为 d

$\because \exists\, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n \in F$ 使得

$B(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = d$

$\Rightarrow B(x_1, \dots, x_n)$ 必有一个 d 阶子式 $D(x_1, \dots, x_n)$ 非零

∵ $D(x_1,\dots x_n) \in F[x_1,\dots x_n]$

∴ 只要选取 $\tilde{x}_1,\dots \tilde{x}_n \in F$ 使得

$D(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n) \neq 0$ 即可

由 直接法 的观点 "绝大多数"

取值 $\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n \in F$ 都满足要求

当 随机选取 $\tilde{x}_1,\dots \tilde{x}_n$ 时.

$\tilde{\vec{x}} = \tilde{x}_1 \vec{e}_1 + \dots + \tilde{x}_n \vec{e}_n$

是极大循环向量的概率为1.

例1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

设 $A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$　　$\mu_A = \mu_A$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} \mapsto A\vec{x}$　　$= (t-1)(t-2)^3$

$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

我们来说明 $\vec{w}$ 是关于 A 的极大循环向量

设 $\vec{v}_0 = \vec{w}$.

$\vec{v}_1 = A(\vec{w}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = A^2(\vec{w}) = A(\vec{v}_1) = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 12 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{v}_3 = A^3(\vec{w}) = A(\vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 31 \\ 18 \\ 28 \\ 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$,

直接计算得

$\mathrm{rank}(\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = 4$

$\Rightarrow$ $F[A]\cdot\vec{w}$ 的维数 ≥ 4

又由 $\deg(\mu_A) = 4$

$\Rightarrow$ $\cancel{\dim(F[A]\cdot\vec{w}) \leq 4}$ 任何循环子空间维数 ≤ 4

$\Rightarrow$ $\cancel{\deg}$ $\dim(F[A]\cdot\vec{w}) = 4 = \deg(\mu_A) = 4$

$\Rightarrow$ $\cancel{F[A]}\cdot\vec{w}$ 是极大循环向量.

§3. 循环子空间的 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解.

问题：设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，$W$ 是 $\mathcal{A}$-循环子空间，把

W 分解为 $\mathcal{A}$-不变子可分子空间的直和.

设 $\mathcal{A}_W$ 的极小多项式在 $F[t]$ 中的 ~~极小多项式~~ 不可约分解为：

$$p_1^{m_1}\cdots p_s^{m_s}$$

其中 $p_1,\ldots,p_s\in F[t]\setminus F$，不可约，首一，两两互素，$m_1>0,\ldots,m_s>0$

则由广义特征子空间分解可知

$$W=\underbrace{\ker(p_1^{m_1}(\mathcal{A}_W))}_{=K_1}\oplus\cdots\oplus\underbrace{\ker(p_s^{m_s}(\mathcal{A}_W))}_{=K_s}$$

其中 $K_1,\cdots K_s$ 都是 $\mathcal{A}_W$-不变的，从而也是 $\mathcal{A}$-不变的. 设

$$\mu_i=\mathcal{A}|_{K_i},\quad i=1\cdots s$$

则 $\mu_i=p_i^{m_i}$.

由第16次作业习题6.

K_i 是 $\mathcal{A}$-循环的

$\because p_i$ 不可约 $\therefore$ 由第二章定理10.2

K_i 是 $\mathcal{A}$-不可分的

于是 $W=K_1\oplus\cdots\oplus K_s$

是 W 的 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解

而 K_i 的一组基可通过 ~~求解~~ $\cancel{p_i^{m_i}(\mathcal{A}_W)}$

$\ker(p_i^{m_i}(\mathcal{A}_W))$ 的基底找到

事实上 我们也可以不通过线性变换 $\mathcal{A}_W$ 而直接利用 $\mathcal{A}$ 求 K_i 的基.

设 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 是 V 的一组基, A 是 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵. 设

$$W=F[\mathcal{A}]\vec{w}.$$

而 $\vec{w},\mathcal{A}(\vec{w}),\dots,\mathcal{A}^{d-1}(\vec{w})$ 是 W 的一组基

令 $\vec{z}=z_0\vec{w}+z_1\mathcal{A}(\vec{w})+\dots+z_{d-1}\mathcal{A}^{d-1}(\vec{w})$

其中 $z_0,z_1,\dots,z_{d-1}\in F$ 待定

则 $K_i=\{\vec{z}\mid P_i(\mathcal{A}_W)^{m_i}(\vec{z})=\vec{0}\}$

$=\{\vec{z}\mid P_i(\mathcal{A})^{m_i}(\vec{z})=\vec{0}\}$

$\boxed{P_i(\mathcal{A})^{m_i}(\vec{z})=\vec{0}}$ 设 $(\vec{w},\mathcal{A}(\vec{w}),\dots,\mathcal{A}^{d-1}(\vec{w}))$

$=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})M,\ M\in F^{n\times d}$

则 $P_i^{m_i}(\mathcal{A})(\vec{z})=\vec{0}$

$$\iff \underbrace{P_i^{m_i}(A)M\begin{pmatrix}z_0\\ z_1\\ \vdots\\ z_{d-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\Big\}n}_{\text{齐次线性方程组}}$$

例2. 利用例1中的数据 求 $W=F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}$ 的 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解.

解 因为 $\vec{w}$ 是 $\mathcal{A}$-极大循环向量

$$\mu_{\mathcal{A}_W}=\mu_{\mathcal{A}}=\underbrace{(t-1)}_{P_1}\underbrace{(t-2)^3}_{P_2}$$

$$P_1(A)(\vec{v_0},\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3})\begin{pmatrix}z_0\\ z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

~~⟹ 解空间~~

$$P_2(A)^3(\vec{v_0},\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3})\begin{pmatrix}z_0\\ z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

特征子空间分别为 $\left\langle \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ 和 $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

代入方程

$$K_1 = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_0} \rangle, \quad K_2 = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 10 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 30 \\ 18 \\ 26 \\ 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_3} \rangle$$

于是 $W = \langle \vec{u}_0 \rangle \oplus \overset{K_2}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle}$

$\mathcal{A}$-不可分 $\quad$ $\mathcal{A}$-不可分

$\mu_1 = t-1 \quad \mu_2 = (t-2)^3$.

§4. 降维

给定域 F 上线性空间 V 的一组基 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$; $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 在 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 下的矩阵是 A. 设 $\vec{w}$ 是关于 $\mathcal{A}$ 的极大循环向量. 并设 $\dim(F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}) = d < n$. 求 $\mathcal{A}$-不变子空间 U, 使得

$$V = (F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}) \oplus U.$$

以下方法来自第二章定理9.1的证明。

① 设 $W = F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}$. W 有基底

$$\vec{w}, \mathcal{A}(\vec{w}), \cdots, \mathcal{A}^{d-1}(\vec{w})$$

将其扩充为 V 的一组基

$$\vec{w}, \mathcal{A}(\vec{w}), \cdots, \mathcal{A}^{d-1}(\vec{w}), \vec{e}_{d+1}, \cdots, \vec{e}_n$$

算出矩阵 $L \in GL_n(F)$ 使得

$$\boxed{\begin{aligned}&(\vec{w}, \mathcal{A}(\vec{w}), \cdots, \mathcal{A}^{d-1}(\vec{w}), \vec{e}_{d+1}, \cdots, \vec{e}_n) \\ &= (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n) L\end{aligned}}$$

② 设 $f: V \to F$ 是满足

$f(\vec{w})=0, \dots, f(A^{d-2}(\vec{w}))=0,\ f(A^{d-1}(\vec{w}))=1$

$f(\vec{\varepsilon_j})=0,\ j=d+1, \dots, n.$ 的线性函数

则 $\forall \vec{x} = x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n}$

$$f(\vec{x}) = (f(\vec{e_1}), \dots, f(\vec{e_n}))\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (f(\vec{w}), f(A(\vec{w})), \dots, f(A^{d-1}(\vec{w})), f(\vec{\varepsilon_{d+1}}), \dots, f(\vec{\varepsilon_n}))\, L^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (0, \dots, 0, \underset{d}{1}, 0 \dots 0)\, L^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \overrightarrow{L^{-1}_d}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

~~f 在 $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ 下的矩阵是~~

$$\boxed{f(\vec{x}) = \overrightarrow{L^{-1}_d}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

③ 设 $\varphi: V \to F^d$

$$\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} f(\vec{x}) \\ f(A(\vec{x})) \\ \vdots \\ f(A^{d-1}(\vec{x})) \end{pmatrix}$$

下面我们求 φ 在 $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ 和 F^d 的标准基下的矩阵

$$\varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{L^{-1}_d}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{L^{-1}_d}\, A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \overrightarrow{L^{-1}_d}\, A^{d-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \overrightarrow{L^{-1}_d} \\ \overrightarrow{L^{-1}_d}A \\ \vdots \\ \overrightarrow{L^{-1}_d}A^{d-1} \end{pmatrix}}_{M.}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

由定理9.1的证明：U 可取为 $\ker(\varphi)$.

而 $\ker(\varphi)$ 可由求解齐次线性方程组

$$M\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ 确定.

例3 利用 例1和例2中的数据

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

求一个 A-不变子空间 U 使得

$$V = (F[A]\cdot\vec{w}) \oplus U$$

由前例记号

$\vec{V_0} = \vec{W}$, $\vec{V_1} = A(\vec{w})$, $\vec{V_2} = A^2(\vec{w})$, $\vec{V_3} = A^3(\vec{w})$

$\vec{V_0}, \vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}$ 是 $F[A]\cdot\vec{w}$ 的基. 将其

扩充为 V 的基

$\vec{V_0}, \vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}$, $\cancel{\vec{V_4} = \vec{e_5}, \vec{V_5} = \vec{e_6}}$

$$\vec{V_4} = \vec{e_5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{V_5} = \vec{e_6} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则 $(\vec{V_0}, \vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}, \vec{V_4}, \vec{V_5})$

$$= \underbrace{(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}, \vec{e_5}, \vec{e_6})}_{\text{单位阵}} L.$$

其中 $L = (\vec{V_0}, \vec{V_1}, \vec{V_3}, \vec{V_3}, \vec{V_4}, \vec{V_5})$

$$\text{而 } L^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -12 & -\frac{5}{3} & \frac{11}{3} & 0 & 0 \\ -12 & 20 & \frac{5}{3} & -\frac{26}{3} & 0 & 0 \\ 6 & -11 & -\frac{1}{3} & \frac{16}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E_4} = (-1, 2, 0, -1, 0, 0)$$

$$\forall \vec{x} = x_1\vec{e_1} + \cdots + x_6\vec{e_6}$$

$$f(\vec{x}) = -x_1 + 2x_2 - x_4$$

线性映射 φ 在 $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_6}$ 和 F^4 标准基

下的矩阵

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 & 0 & 7 & 13 \\ -1 & 9 & -7 & 4 & 20 & 43 \end{pmatrix}$$

于是 $U=\ker(\varphi)=\langle \underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{\vec{u}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}4\\1\\0\\-2\\-2\\1\end{pmatrix}}_{\vec{u}_2} \rangle$

是 A-不变子空间

$$V=\langle \vec{v}_0,\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\rangle \oplus \langle \vec{u}_1,\vec{u}_2\rangle$$

A-循环，　　A不变

$$=\langle \vec{w}_0\rangle \oplus \langle \vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3\rangle \oplus \langle \vec{u}_1,\vec{u}_2\rangle$$

A-不可分　　A-不可分　　A不变

（见例2）.

下面我们对 U、A_U

重复上面的步骤.

直接计算得

$\vec{u}_1$, $A\vec{u}_1$ 线性无关

$\because \dim U=2$ $\therefore$ $U=F[A]\vec{u}_1$

且 $A^2\vec{u}_1-\cancel{4A}\,4A\vec{u}_1+4\vec{u}_1=\vec{0}$

$\Rightarrow A_U$ 的极小多项式是 $(t-2)^2$

由第二章定理10.2，U是A-不可分的

即.

$$V=\underbrace{\langle \vec{w}_0\rangle}_{W_1}\oplus\underbrace{\langle \vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3\rangle}_{W_2}\oplus\underbrace{\langle \vec{u}_1,\vec{u}_2\rangle}_{W_3}$$

是V的一个A-不可分子空间直和

设 μ_i 是 A_{W_i} 上的极小多项式, $i=1,2,3$

则 $\mu_1=t-1$,

$\mu_2=(t-2)^3$

$\mu_3=(t-2)^2$

§5. 构造Jordan基

<u>问题</u>: 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 求

J_A 和矩阵 $P \in GL_n(\mathbb{C})$

使得 $J_A = P^{-1}AP$.

方法: ① 设 $\mathcal{A}: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A\vec{x}$$

用前n节的方法计算 $\mathbb{C}^n$ 的

$\mathcal{A}$-不可分子空间直和分解

$$\mathbb{C}^n = U_1 \oplus \cdots \oplus U_\ell$$

设 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{U_i}$, μ_i 是 $\mathcal{A}_i$

的极小多项式. $\because F = \mathbb{C}$

$$\mu_i = (t - \lambda_i)^{m_i},$$

其中 $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $m_i > 0$ $\lambda_1, \cdots \lambda_\ell$ 两两不同

于是 $J_A = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & J_{m_\ell}(\lambda_\ell) \end{pmatrix}$ ⑪

② $\forall i \in \{1, \dots, \ell\}$. 找出

$\vec{z}_i$ 是 U_i 关于 $\mathcal{A}_i$ 的极大循环向量

设 $\vec{\varepsilon}_{ij} = (\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E}_i)^{m_i - j}(\vec{z}_i)$

$j = \cancel{m_i - 1, m_i - 2, \cdots,}\ 1, 2, \dots m_i$

设 $P = (\vec{\varepsilon}_{11}, \cdots \vec{\varepsilon}_{1m_1}, \cdots \vec{\varepsilon}_{\ell 1}, \cdots, \vec{\varepsilon}_{\ell m_\ell})$

$\in GL_n(\mathbb{C})$

由第二章定理11.1和命题12.1

$$P^{-1}AP = J_A.$$

例4. 设 $A \in M_6(\mathbb{C})$ 由例1给出. 求 J_A 和矩阵 $P \in GL_6(\mathbb{C})$ 使得

$$J_A = P^{-1}AP$$

由例3可知

$$\mathbb{C}^6 = \langle \vec{w_0} \rangle \oplus \langle \vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3} \rangle \oplus \langle \vec{u_1}, \vec{u_2} \rangle$$

$$\vec{w_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w_1} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 10 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w_2} = \begin{pmatrix} 30 \\ 18 \\ 26 \\ 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\langle \vec{w_0} \rangle$ 的极大循环向量取为 $\vec{w_0}$

$\langle \vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3} \rangle$ 的极大循环向量取为 $\vec{w_1}$

$\langle \vec{u_1}, \vec{u_2} \rangle$ 的极大循环向量取为 $\vec{u_2}$

$$P = \left(\vec{w_0}, (A-2E)^2\vec{w_1}, (A-2E)\vec{w_1}, \vec{w_1}, (A-2E)\vec{u_2}, \vec{u_2} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 & 9 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则 $P^{-1}AP = J_A = \begin{pmatrix} J_1(1) & & \\ & J_3(2) & \\ & & J_2(2) \end{pmatrix}$

该方法比直接法效率高, 不需要解有 n^2 个未知数的方程组