

# 第一章 预备知识

## 1 代数起源于解方程

### 1.1 线性方程(组)

设  $a, b$  是实数, 求实数  $x$  使得

$$ax = b.$$

- (i)  $a \neq 0$ , 唯一解; 轨迹是实轴上一个点.
- (ii)  $a = 0, b \neq 0$ , 无解.
- (iii)  $a = b = 0$ , 不止一个解; 轨迹是整个实轴.

设  $a, b, c$  是实数, 求实数  $x, y$  使得

$$ax + by = c.$$

- (i)  $a, b$  不全为零, 不止一个解; 轨迹是实平面上的一条直线.
- (ii)  $a = b = 0, c \neq 0$ , 无解.
- (iii)  $a = b = c = 0$ , 不止一个解; 轨迹是整个实平面.

设  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  是实数, 求实数  $x, y$  使得

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}.$$

- (i) 唯一解, 轨迹是实平面上两条不平行直线的交点.
- (ii) 无解.
- (iii) 不止一个解; 实平面两条重合的直线.

设  $a, b, c, d$  是实数, 求实数  $x, y, z$  使得

$$ax + by + cz = d.$$

说服自己当  $a, b, c$  不全为零时, 上述方程代表三维实空间的一张平面.

一般的实系数线性方程组表述如下:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}. \quad (1)$$

它有  $n$  个未知数和  $m$  个方程.

下面我们引入矩阵来简洁地表示线性方程组. 实数上

的  $m$  行  $n$  列的矩阵是指

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

对  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $A$  的第  $i$  行是  $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$ , 记为  $\vec{A}_i$ . 对  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $A$  的第  $j$  列是

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}.$$

记为  $\vec{A}^{(j)}$ . (1) 中的矩阵可简记为  $(a_{i,j})_{m \times n}$ .

**注解 1.1** 我们用  $O_{m \times n}$  代表由  $m$  行和  $n$  列个 0 组成的矩阵, 称为  $m \times n$  阶零矩阵.

**例 1.2** 设矩阵  $A$  由 (2) 给出. 则对  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $\vec{A}_i$  是 1 行  $n$  列的矩阵. 对  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $\vec{A}^{(j)}$  是  $m$  行 1 列的矩阵. 特别地, 每个实数都是一行一列的矩阵.

矩阵 (2) 称为方程组 (1) 的系数矩阵. 而矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}.$$

称为 (1) 的增广矩阵. (1) 称为以  $B$  为增广矩阵的关于  $x_1, \dots, x_n$  的线性方程组. 如果我们说  $B$  是一个线性方程组的增广矩阵, 则该方程组是 (1).

**定义 1.3** 如果 (1) 有解, 则称它是相容的 (*compatible*). 否则称之为不相容的. (*incompatible*). 设 (1) 相容. 如果它的解唯一, 则称之为确定的 (*deterministic*). 否则称之为不确定的 (*non-deterministic*).

## 1.2 高次方程(组)

设  $a, b, c$  是实数且  $a \neq 0$ , 求  $x$  使得

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

配方法:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \left( \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right). \end{aligned}$$

于是, 上述一元二次方程等价于

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

令  $y = x + \frac{b}{2a}$ . 则

$$y^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

故求解一元二次方程等价于开平方. 我们有

$$y = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

**注解 1.4** 当  $b^2 - 4ac < 0$  时, 一元二次方程没有实数解.

设  $a, b, c, d$  是实数且  $a \neq 0$ , 求  $x$  使得

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \quad (3)$$

令

$$x = y - \frac{b}{3a}.$$

将  $y$  代入等价于 (3) 的方程

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

得

$$\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(y - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} = 0.$$

化简后, 我们有

$$y^3 + py + q = 0, \quad (4)$$

其中  $p, q$  是实数.

**注解 1.5** 设

$$f(x) = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}x + \frac{a_0}{a_n}.$$

令

$$x = y - \frac{a_{n-1}}{na_n}$$

并代入  $f$  得到  $n$  次多项式  $g(y)$ . 该多项式的次高项的系数等于零.

为了求解 (4), 令

$$y = z - \frac{p}{3z}. \quad (5)$$

代入 (4) 得

$$\left(z - \frac{p}{3z}\right)^3 + p\left(z - \frac{p}{3z}\right) + q = 0.$$

展开后, 我们有:

$$z^3 - pz + \frac{p^2}{3z} - \frac{p^3}{27z^3} + pz - \frac{p^2}{3z} + q = 0.$$

化简得

$$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0. \quad (6)$$

通过对方程求出  $z^3$ , 再通过开立方求得  $y$ , 然后得到  $x$ . 由此可知我们可以通过有理运算(加、减、乘、除), 开平方和开立方求出一元三次方程的根. 变换 (5) 是非平凡的, (6) 称为 (3) 的预解式 (resolvent).

一元四次方程可以通过有理运算、开平方、开立方和开四次方求解。其核心技巧也是构造预解式. 但 Abel 和 Galois 证明了一元五次方程不可能通过有理运算和开方求解。特别地, Galois 的证明催生了一门新的数学分支: 抽象代数.

求解多元高次代数方程组是代数几何的起源. 总之, 代数是可操作的几何, 几何是是描绘的代数.

## 2 线性方程组初步

设  $L$  和  $L'$  是两个实系数  $n$  元线性方程组. 如果或者  $L$  和  $L'$  都不相容, 或者  $L$  和  $L'$  有相同的实解, 则称它们是等价的. 本节的目的是把一个线性方程组化为一个等价的线性方程组, 而后者的相容性和确定性是容易判断的.

## 2.1 矩阵的初等行变换

设  $A = (a_{i,j})_{m \times n}$  是  $m \times n$  的实矩阵,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

- (i) 把  $A$  中第  $i$  行和第  $j$  行互换位置得到矩阵  $A'$ . 则称  $A'$  是通过第  $I$  类初等行变换由  $A$  得到的. 此时  $A'$  的第  $i$  行和第  $j$  行分别是

$$(a_{j,1}, \dots, a_{j,n}) \quad \text{和} \quad (a_{i,1}, \dots, a_{i,n}).$$

其它行与  $A$  相同.

- (ii) 设  $i \neq j$ ,  $\alpha$  是实数. 把  $A$  的第  $i$  行通乘  $\alpha$  后加到第  $j$  行上得到矩阵  $A'$ . 则称  $A'$  是通过第  $II$  类初等行变换由  $A$  得到的. 时  $A'$  的第  $j$  行是

$$(\alpha a_{i,1} + a_{j,1}, \dots, \alpha a_{i,n} + a_{j,n}).$$

其它行与  $A$  相同.

- (iii) 设  $\alpha$  是非零实数. 把  $A$  的第  $i$  行通乘  $\alpha$  得到矩阵  $A'$ . 则称  $A'$  是通过第  $III$  类初等行变换由  $A$  得到的. 时  $A'$  的第  $i$  行是

$$(\alpha a_{i,1}, \dots, \alpha a_{i,n}).$$

其它行与  $A$  相同.



I、II、III 类初等行变换统称初等行变换.

**引理 2.1** 设  $n$  元线性方程组  $L$  的增广矩阵是  $B$ , 对  $B$  进行一次初等行变换得到矩阵  $B'$ . 再设  $B'$  对应的线性方程组是  $L'$ . 则  $L$  与  $L'$  等价.

证明. 当  $B'$  是通过第 I 类初等行变换由  $B$  得到的. 则  $L'$  是把  $L$  中两个方程互换位置得到的方程组. 于是,  $L$  和  $L'$  显然等价. 当  $B'$  是通过第 III 类初等行变换由  $B$  得到的. 则  $L'$  是把  $L$  中某个方程通乘一个非零实数得到的方程组. 于是,  $L$  和  $L'$  等价.

下面我们考虑第二类初等变换. 设

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}.$$

则  $L$  是

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \cdots + a_{j,n}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right. .$$

而  $L'$  是

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i \\ \vdots \\ (\alpha a_{i,1} + a_{j,1})x_1 + (\alpha a_{i,2} + a_{j,2})x_2 + \cdots + (\alpha a_{i,n} + a_{j,n})x_n = \alpha b_i + b_j \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right.$$

下面我们来证明  $L$  和  $L'$  同解. 设

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \beta_1 \\ x_2 = \beta_2 \\ \vdots \\ x_n = \beta_n \end{array} \right. \quad (7)$$

是  $L$  的一个解. 代入  $L'$  的第  $j$  个方程得

$$\sum_{k=1}^n (\alpha a_{i,k} + a_{j,k})\beta_k = \alpha \sum_{k=1}^n a_{i,k}\beta_k + \sum_{k=1}^n a_{j,k}\beta_k = \alpha b_i + b_j.$$

注意到  $L$  和  $L'$  只有第  $j$  个方程不同. 故 (7) 是  $L'$  的解.

反之, 设 (7) 是  $L'$  的解. 方程组  $L$  中只有第  $j$  个方程

与  $L'$  中不一样, 把解代入该方程得:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{j,k} \beta_k &= \sum_{k=1}^n (\alpha a_{i,k} + a_{j,k} - \alpha a_{i,k}) \beta_k \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^n (\alpha a_{i,k} + a_{j,k}) \beta_k}_{L' \text{ 中第 } j \text{ 个方程}} - \alpha \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{i,k} \beta_k}_{L' \text{ 中第 } i \text{ 个方程}} \\ &\stackrel{\because j \neq i}{=} \alpha b_i + b_j - \alpha b_i = b_j. \end{aligned}$$

故 (7) 也是  $L$  的解.  $\square$

**命题 2.2** 设  $n$  元线性方程组  $L$  的增广矩阵是  $B$ , 对  $B$  进行有限次初等行变换得到矩阵  $B'$ . 再设  $B'$  对应的线性方程组是  $L'$ . 则  $L$  与  $L'$  等价.

证明. 有限次利用引理 2.1 即得.  $\square$

## 2.2 阶梯型矩阵

设  $A$  是  $m \times n$  的实矩阵. 如果

$$A = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中  $\bullet$  代表非零实数,  $*$  代表任意实数, 则称  $A$  是阶梯型矩阵. 特别地, 仅由零组成的矩阵是阶梯型的.

**命题 2.3** 设  $A$  是  $m \times n$  的实矩阵. 通过有限次第  $I$  类和第  $II$  类初等行变换, 我们可以把  $A$  化为一个阶梯型矩阵.

证明. 设  $A$  不是零矩阵. 我们对  $m$  归纳. 当  $m = 1$  时,  $A$  本身是阶梯型的. 故命题成立. 设  $m > 1$  且命题对  $m - 1$  成立. 设  $\ell$  列是  $A$  中第一个含有非零数的列, 其中一个非零数等于  $a$  并出现在第  $k$  行. 我们把第一行和第  $k$  行对调得到矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & \overset{\downarrow \ell}{a} & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & b_2 & * \cdots * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & b_m & * \cdots * \end{pmatrix},$$

其中  $b_2, \dots, b_m$  是实数. 把第一行通乘  $-b_2 a^{-1}$  加到第二行上得

$$C = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & \overset{\downarrow \ell}{a} & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & 0 & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & b_3 & * \cdots * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & b_m & * \cdots * \end{pmatrix},$$

类似地, 我们把第一行通乘  $-b_i a^{-1}$  加到第  $i$  行上,  $i = 3, 4, \dots, m$  得

$$D = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & a & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & 0 & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & 0 & * \cdots * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & * \cdots * \end{pmatrix}.$$

设  $D'$  是由  $D$  中第二行、第三行、 $\dots$ 、第  $m$  行组成得矩阵. 则  $D'$  有  $m - 1$  行.

根据归纳假设, 通过有限次第 I 类和第 II 类初等行变换, 我们可以把  $D'$  化为一个阶梯型矩阵  $D''$ , 其中前  $\ell + 1$  列中得元素都等于零. 而对  $D'$  做初等行变换相当于对  $D$  做初等行变换. 于是, 通过有限次第 I 类和第 II 类初等行变换, 我们把  $D$  化为阶梯矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & a & * \cdots * \\ & D'' & \end{pmatrix}. \quad \square$$

#### 例 2.4 利用初等行变换把矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

化为阶梯型.

解.

$$A \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{8}{3}r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \square$$

## 2.3 高斯消去法

设  $L$  是一个  $n$  元线性方程组, 其系数矩阵为  $A$ , 增广矩阵为  $B = (A|\mathbf{b})$ . 由命题 2.3 我们可以对  $B$  做有限次初等行变换把系数矩阵  $A$  化为阶梯型得到: 矩阵

$$C = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & c_1 \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & c_k \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_m \end{pmatrix},$$

**定理 2.5** 利用上述记号. 我们有

- (i)  $L$  相容当且仅当  $c_{k+1} = \cdots = c_m = 0$ ;
- (ii)  $L$  确定当且仅当  $c_{k+1} = \cdots = c_m = 0$  且  $k = n$ .









得

$$B \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 10 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{8}{3}r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

根据定理 2.5,  $L_B$  不相容.

通过对  $C$  做初等行变换把  $L_C$  的系数矩阵化为阶梯型得

$$C \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 6 & 9 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

根据定理 2.5,  $L_C$  相容但不确定.  $\square$

## 2.4 齐次线性方程组

实系数线性方程组  $H$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}. \quad (10)$$

称为齐次线性方程组. 显然,  $H$  由它的系数矩阵唯一确定且  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$  是它的一个解. 称之为  $H$  的平凡解或零解. 故  $H$  必然相容.

**定理 2.7** 齐次线性方程组  $H$  有非平凡解当且仅当其系数矩阵可以通过第 I, II 类初等行变换化为

$$\left( \begin{array}{c} \left( \begin{array}{cccccccccccc} 0 \cdots 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots * \end{array} \right)_{k \times n} \\ O_{(m-k) \times n} \end{array} \right)$$

其中  $\bullet$  代表非零实数,  $*$  代表任意实数, 而  $k < n$ .

证明. 根据定理 2.5,  $H$  不确定当且仅当它的增广矩阵可通过第 I, II 类初等行变换化为

$$\left( \begin{array}{c} \left( \begin{array}{cccccccccccc} 0 \cdots 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots * & 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots * & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots * & 0 \end{array} \right)_{k \times (n+1)} \\ O_{(m-k) \times (n+1)} \end{array} \right)$$

且  $k < n$ .  $\square$ .

由此我们得到一个重要的结论.

**推论 2.8** 设齐次线性方程组 (10) 中  $m < n$ . 则该方程组有非平凡解.

证明. 设通过第 I, II 类初等行变换把该方程组的系数矩阵化为阶梯型有  $k$  个非零行. 则  $k \leq m < n$ . 由定理 2.7, 该方程组必有非平凡解.  $\square$

## 2.5 二阶行列式

行列式 (determinant) 在一定条件下可以通过表线性方程组的系数表示该方程组解. 我们在这里讨论二阶行列式的情形. 设实系数二阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

它的行列式定义为  $ad - bc$ , 记为  $\det(A)$  或  $|A|$ .

**命题 2.9** 关于未知数  $x, y$  的实系数线性方程组

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

是确定的当且仅当其系数矩阵的行列式非零. 此时方程组的解等于

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

证明. 设方程组是确定的. 则  $a, c$  不全为零. 不妨设  $a \neq 0$ .  
由高斯消去法得

$$\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b & e \\ 0 & d - a^{-1}cb & f - a^{-1}ce \end{pmatrix}.$$

由第一讲定理 2.5 (ii) 可知,  $d - a^{-1}cb \neq 0$ . 于是,  $ad - cb \neq 0$ .

反之, 设  $ad - cb \neq 0$ . 则  $a, c$  不全为零. 不妨设  $a \neq 0$ .  
于是, 上述的消元过程和结果不变, 且  $d - a^{-1}cb \neq 0$ . 由第一讲定理 2.5 (ii) 可知, 原方程组是确定的. 此时

$$y = \frac{f - a^{-1}ce}{d - a^{-1}cb} = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

代入第一个方程得

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}. \quad \square$$