7.2 素数

定义 7.12 设 p 是大于 1 的整数. 如果 p 不能写成两个大于 1 的整数之积, 则称 p 是素数*(prime)*.

例 7.13 证明*:* 任何大于 1 的正整数都是素数之积.

证明. 设 n 是大于 1 的整数. 我们对 n 归纳. 当 $n=2$ 时显然. 设 $n>2$ 且结论对大于 1 且 小于 n 的整数都成立. 如果 n 是素数, 则结论显然成立. 否则存在两个大于 1 且小于 n 的整数 i,j 使得 $n=ij$, 由归纳假设, i 和 j 都是素数的乘积. 故 n 也是. $\square$

素数包括: $2,3,5,7,11,13,17,19,\ldots.$

例 7.14

$$24=2^3\times 3,\quad 10969629647=104729\times 104743.$$

例 7.15 证明*:* 素数有无穷多个.

证明. 假设素数只有有限个*:* $p_1,\ldots,p_k$. 令 $n=p_1\cdots p_k+1$. 由上例可知, 存在某个素数整除 n. 不妨设该素数是 p_1. 根据第一章第四讲引理 *7.1*, $p_1|1$, 矛盾. $\square$

引理 7.16 设 p 是素数*,* $a,b\in\mathbb{Z}$*.* 如果 $p|(ab)$*,* 则 $p|a$ 或 $p|b$*.*

证明. 设 $p \nmid a$ 且 $g = \gcd(p, a)$. 则 $g|p$. 因为 p 是素数, 所以 $p \neq 1$. 根据第一章第四讲定理 7.8, 存在 $u, v \in \mathbb{Z}$ 使得 $up + va = 1$. 于是, $upb + v(ab) = b$. 根据第一章第四讲引理 7.1, $p|b$. □

例 7.17 设 p 是素数, k 是小于 p 的正整数. 证明:

$$p|\binom{p}{k}.$$

证明. 由

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$$

可知

$$p! = \binom{p}{k} k!(p-k)!.$$

两次应用上述引理可知,

$$p|\binom{p}{k} \quad \text{或} \quad p|k! \quad \text{或} \quad p|(p-k)!.$$

反复应用上述引理得出:

$$p|\binom{p}{k} \quad \text{或} \quad p|i \quad \text{或} \quad p|j,$$

其中 $1 \leq i \leq k$ 和 $1 \leq j \leq p-k$. 因为后两种情形不可能发生, 所以

$$p|\binom{p}{k}. \quad \square$$

第二章　矩阵

1　线性相关性

1.1　坐标空间

设

$$\mathbb{R}^{n\times 1} = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \}.$$

称为 n 维列向量(坐标)空间. 设

$$\mathbb{R}^{1\times n} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

称为 n 维行向量(坐标)空间. 这学期我们通常在列空间中描述线性代数的内容. 于是, 记 $\mathbb{R}^{n\times 1}$ 为 $\mathbb{R}^n$, 其中的元素称为向量. 特别地

$$\mathbf{0}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

称为 $\mathbb{R}^n$ 中的零向量. 当 n 从上下文可确定时, $\mathbf{0}_n$ 记为 $\mathbf{0}$.

设

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 中的向量. 我们定义

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} := \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}.$$

则向量的加法满足下列规律: $\forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$,

(i) (交换律) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$;

(ii) (结合律) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$;

(iii) (加法单位元) $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$;

(iv) (加法逆) $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$, 其中 $-\mathbf{x}$ 是把 $\mathbf{x}$ 中每个坐标反号后得到的向量.

再设 $\lambda \in \mathbb{R}$. 我们定义数乘

$$\lambda\mathbf{x} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

则“标量”与向量的数乘满足下列规律: $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

(i) $(\lambda\mu)\mathbf{x}=\lambda(\mu\mathbf{x})$;

(ii) $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$.

进而, 加法和数乘满足下列分配律： $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,

(i) $\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}$;

(ii) $(\lambda+\mu)\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{x}$.

例 1.1 设

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

则

$$2\mathbf{x}+3\mathbf{y}=2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\6\end{pmatrix}.$$

例 1.2 设以 $x_1,\ldots,x_n$ 为实未知数的线性方程组的增广矩阵是 $B=(A|\mathbf{b})$, 其中 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$. 则该方程组可以表示为

$$x_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+x_n\vec{A}^{(n)}=\mathbf{b}.$$

1.2　线性组合，线性相关和线性无关

定义 1.3 设 $\mathbf{w},\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\in\mathbb{R}^n$. 如果存在 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{w}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{v}_k,$$

则称 $\mathbf{w}$ 是 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ （在 $\mathbb{R}$ 上）的线性组合.

当 $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{v}$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}$, 我们说 $\mathbf{w}$ 和 $\mathbf{v}$ “平行”. 特别地, $\mathbf{0}_n$ 与 $\mathbb{R}^n$ 中的向量都平行.

例 1.4 设 $\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$. 则 $A = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \in \mathbb{R}^{n\times k}$ 和 $B = (A|\mathbf{w}) \in \mathbb{R}^{n\times(k+1)}$. 根据例 *1.2*, 以 B 为增广矩阵的 k 元线性方程组相容当且仅当 $\mathbf{w}$ 是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 的线性组合.

例 1.5 设

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

判定 $\mathbf{z}$ 是不是 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的线性组合.

解. 考虑增广矩阵

$$B = (\mathbf{x}, \mathbf{y}|\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由 *Gauss* 消去法可知,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

于是, B 对应的线性方程组不相容. 故 $\mathbf{z}$ 不是 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的线性组合(第一章第一讲定理 *2.5*).

记号. 在 $\mathbb{R}^n$ 中,

$$\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \mathbf{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

注解 1.6 对任意

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

我们有 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$. 即 $\mathbb{R}^n$ 中的任意向量都是 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ 的线性组合.

定义 1.7 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$. 如果存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, 不全为零, 使得

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

则称 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$（在 $\mathbb{R}$）上线性相关. 否则, 我们称 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$（在 $\mathbb{R}$）上线性无关.

由上述定义可知, 一个向量 $\mathbf{v}$ 线性相关当且仅当 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. 如果 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 中有一个零向量, 则它们必然线性相关. 两个向量线性无关当且仅当它们不平行.

例 1.8 设 $A=(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k)\in\mathbb{R}^{n\times k}$. 根据例 *1.2,* 以 A 为系数矩阵的 k 元齐次线性方程组有非平凡解当且仅当 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 的线性相关.

例 1.9 设

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{z}=\begin{pmatrix}5\\1\\6\end{pmatrix}.$$

判定 $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ 是否线性相关.

解. 设 $A=(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$. 由 *Gauss* 消去法可知

$$A=\begin{pmatrix}1&1&5\\2&-1&1\\3&0&6\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&5\\0&-3&-9\\0&-3&-9\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&5\\0&-3&-9\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

于是, 以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组有非平凡解. 故 $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ 线性相关*(*第一章第一讲定理 *2.7).*

例 1.10 证明*:* $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\in\mathbb{R}^n$ 线性无关.

证明. 设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ 使得 $\alpha_1\mathbf{e}_1+\cdots+\alpha_n\mathbf{e}_n=\mathbf{0}$. 则

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+\alpha_n\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_{n-1}\\\alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0.$$

故 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 线性无关.

下面的命题总结了关于线性组合、线性相关和无关的基本事实.

命题 1.11 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$.

(i) 如果存在 $i \in \{1, \ldots, k\}$ 使得 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i$ 线性相关, 则 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k$ 也线性相关;

(ii) 如果 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性无关, 则对任意 $i \in \{1, \ldots, k\}$ 使得 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i$ 也线性无关;

(iii) 向量 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性相关当且仅当这些向量中的某个向量是其它向量的线性组合;

(iv) 再设 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 且 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性无关. 则 $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性相关当且仅当存在唯一的 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k.$$

证明. (i) 因为 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i$ 线性相关, 所以存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_i \in \mathbb{R}$, 不全为零, 使得

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

于是,

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_i \mathbf{v}_i + 0 \mathbf{v}_{i+1} + \cdots + 0 \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

因为在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ 中已有非零实数, 所以 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性相关.

(ii) 是 (i) 的逆否命题.

(iii) 设向量 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性相关. 则存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, 不全为零, 使得

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

不妨设 $\alpha_1 \neq 0$. 则

$$\mathbf{v}_1 = -(\alpha_1^{-1}\alpha_2)\mathbf{v}_2 - \cdots - (\alpha_1^{-1}\alpha_n)\mathbf{v}_n.$$

反之不妨设 $\mathbf{v}_k$ 是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$ 的线性组合. 则存在 $\beta_1, \ldots, \beta_{k-1} \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{v}_k = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}.$$

于是, $\beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + (-1)\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. 故 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k$ 线性相关.

(iv) 设 $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性相关. 则存在 $\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, 不全为零, 使得

$$\beta\mathbf{v} + \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

则 $\beta \neq 0$. 否则, 我们有 $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ 且 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ 不全为零. 从而推出 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性相关, 矛盾. 故

$$\mathbf{v} = -(\beta^{-1}\alpha_1)\mathbf{v} - \cdots - (\beta^{-1}\alpha_k)\mathbf{v}_k.$$

再设 $\mathbf{v}=\lambda_1\mathbf{v}_1+\cdots+\lambda_k\mathbf{v}_k=\mu_1\mathbf{v}_1+\cdots+\mu_k\mathbf{v}_k$. 其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\mu_1,\ldots,\mu_k\in\mathbb{R}$. 则

$$(\lambda_1-\mu_1)\mathbf{v}_1+\cdots+(\lambda_k-\mu_k)\mathbf{v}_k=\mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 线性无关, 所以 $\lambda_1=\mu_1,\ldots\lambda_k=\mu_k$.

逆命题由 (iii) 直接可得. □

以下引理是建立维数概念的关键.

引理 1.12 *(线性组合引理)* 设 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k;\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_\ell$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两组向量. 设对任意 $j\in\{1,2,\ldots,\ell\}$, $\mathbf{w}_j$ 是 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 的线性组合. 如果 $\ell>k$, 则 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_\ell$ 线性相关.

证明. 设 $\mathbf{w}_j=\sum_{i=1}^k\alpha_{i,j}\mathbf{v}_i$, 其中 $\alpha_{i,j}\in\mathbb{R},j\in\{1,2,\ldots,\ell\}$. 再设 $\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell$ 是待定的实数. 则

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\ell}\lambda_j\mathbf{w}_j &= \sum_{j=1}^{\ell}\lambda_j\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_{i,j}\mathbf{v}_i\right) && (1)\\
&= \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_j\alpha_{i,j})\mathbf{v}_i \quad \text{(分配律和结合律)} && (2)\\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell}(\lambda_j\alpha_{i,j})\mathbf{v}_i \quad \text{(和号互换)} && (3)\\
&= \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{\ell}\lambda_j\alpha_{i,j}\right)\mathbf{v}_i \quad \text{(分配律)} && (4)
\end{aligned}$$

考虑以 $\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell$ 为未知数的齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{\ell}\lambda_j\alpha_{i,j}=0,\quad i=1,2,\ldots,k.$$

根据 $\ell>k$ 和第一章第一讲推论 2.8 (红色推论), 上述方程组有非零解 $\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell\in\mathbb{R}$. 由 (4) 可知, $\sum_{j=1}^{\ell}\lambda_j\mathbf{w}_j=\mathbf{0}$. 故 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_\ell$ 线性相关. □

例 1.13 设 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_m\in\mathbb{R}^n$. 证明*: 如果* $m>n$*, 则* $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_m$ *线性相关.*

证明. 由注解 *1.6* 可知, $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_m$ 都是 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 的线性组合. 根据线性组合引理和假设 $m>n$ 可知, $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_m$ 线性相关. □

例 1.14 *(线性组合的传递性)* 设向量 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_1$, $\ldots$, $\mathbf{v}_k$, $\mathbf{w}_1$, $\ldots$, $\mathbf{w}_\ell$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中. 如果 $\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 的线性组合且每个 $\mathbf{v}_i$ 都是 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_\ell$ 的线性组合, 则 $\mathbf{u}$ 也是 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_\ell$ 的线性组合.

证明. 设 $\mathbf{u}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{v}_i$ 和 $\mathbf{v}_i=\sum_{j=1}^{\ell}\beta_{i,j}\mathbf{w}_j$, 其中 $\alpha_i,\beta_{i,j}\in\mathbb{R}$. 则 $\mathbf{u}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\left(\sum_{j=1}^{\ell}\beta_{i,j}\mathbf{w}_j\right)=\sum_{j=1}^{\ell}\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\beta_{i,j}\right)\mathbf{w}_j$. 故 $\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_\ell$ 的线性组合. □

1.3 坐标空间中的子空间

定义 1.15 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空子集. 如果对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in U$ 和 $\alpha\in\mathbb{R}$, *(i) (加法封闭性)* $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in U$,

(ii) (数乘封闭性) $\alpha\mathbf{x}\in U$.

则称 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间*(subspace)*.

命题 1.16 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空子集. 则 U 是子空间当且仅当 U 中任意两个向量的线性组合仍在 U 中.

证明. 设 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 是 U 中任意的两个向量, α,β 是任意两个实数. 如果 U 是子空间, 则 $\alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y}\in U$ (数乘封闭性). 从而 $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\in U$ (加法封闭性). 反之, 设 $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\in U$. 取 $\alpha=\beta=1$ 得到加法封闭性, 取 $\beta=0$ 得到数乘封闭性. 故 U 是子空间. □

命题 1.17 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间, 则 $\mathbf{0}\in U$. 再设 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k\in U$. 则 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k$ 的任意线性组合都在 U 中.

证明. 设 $\mathbf{x}\in U$. 则 $\mathbf{0}=0\mathbf{x}$ 在 U 中. 当 $k=1,2$ 时, 命题 1.16 蕴含 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ 的所有线性组合都在 U 中. 设 $k>2$ 时且 U 中任何 $k-1$ 个向量的线性组合都在 U 中. 对任意 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},\alpha_k\in\mathbb{R}$, $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{k-1},\mathbf{u}_k\in U$, 我们有

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{u}_i=\left(\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i\mathbf{u}_i\right)+\alpha_k\mathbf{u}_k\in U.\quad\square$$

例 1.18 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 其对应的 n 元齐次线性方程组记为 H. 验证 $\mathrm{sol}(H)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间.

证明. 设

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

是 H 的两个解. 则

$$\alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \alpha_n \vec{A}^{(n)} = \mathbf{0}_m, \quad \beta_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \beta_n \vec{A}^{(n)} = \mathbf{0}_m.$$

令 λ, μ 是两个实数, $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}$. 则

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_1 + \mu\beta_n \end{pmatrix}.$$

而

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda\alpha_j + \mu\beta_j)\vec{A}^{(j)} = \lambda\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{A}^{(j)}\right) + \mu\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \vec{A}^{(j)}\right) = \mathbf{0}_m.$$

故 $\mathbf{u} \in \mathrm{sol}(H)$. 根据命题 *1.16*, $\mathrm{sol}(H)$ 是子空间. □

命题 1.19 设 Λ 是一个指标集, 对任意 $\lambda \in \Lambda$, U_λ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间. 则 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ 也是子空间.

证明. 设 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 因为 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U_\lambda$, 其中 λ 是 Λ 中任意元素, 所以 $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in U_\lambda$ (命题 1.16). 由此可

知, $\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$. 故 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ 是子空间(命题 1.16). $\square$

设 $S_1,\ldots,S_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空子集. 我们定义 $S_1,\ldots,S_k$ 的和为

$$S+\cdots+S_k:=\{\mathbf{v}_1+\cdots+\mathbf{v}_k|\mathbf{v}_1\in S_1,\ldots,\mathbf{v}_k\in S_k\}.$$

命题 1.20 设 $U_1,\ldots,U_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 则 $U_1+\cdots+U_k$ 也是子空间.

证明. 设 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\sum_{i=1}^k U_i$. 则存在 $\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_i\in U_i$, $i=1,2,\ldots,k$, 使得 $\mathbf{x}=\sum_{i=1}^k\mathbf{u}_i$ 和 $\mathbf{y}=\sum_{i=1}^k\mathbf{v}_i$. 则对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}=\alpha\left(\sum_{i=1}^k\mathbf{u}_i\right)+\beta\left(\sum_{i=1}^k\mathbf{v}_i\right)=\sum_{i=1}^k(\alpha\mathbf{u}_i+\beta\mathbf{v}_i).$$

根据命题 1.16, $\alpha\mathbf{u}_i+\beta\mathbf{v}_i\in U_i$, $i=1,2,\ldots,k$. 我们得到 $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\in\sum_{i=1}^k U_i$. 故 $\sum_{i=1}^k U_i$ 是子空间. $\square$

定义 1.21 设 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ 和 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 则 $\{\mathbf{v}\}+U$ 简记为 $\mathbf{v}+U$. 称为一个线性流形.

例 1.22 设 $B\in\mathbb{R}^{m\times(n+1)}$, L 是 B 对应的 n 元线性方程组, H 是 B 的前 n 列组成矩阵对应的齐次线性方程组. 如果 L 相容, 则 $\mathrm{sol}(L)=\mathbf{v}+\mathrm{sol}(H)$, 其中 $\mathbf{v}$ 是 L 的一个解. 特别地, $\mathrm{sol}(L)$ 是线性流形.

证明. 设 $M = \mathbf{v} + \mathrm{sol}(H)$ 且 $\mathbf{w} \in M$. 则存在 $\mathbf{z} \in \mathrm{sol}(H)$ 使得 $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{z}$. 令

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

则

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_1 + z_1 \\ \vdots \\ v_n + z_n \end{pmatrix}.$$

我们计算

$$\sum_{i=1}^{n} (v_i + z_i)\vec{B}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{B}^{(i)} + \sum_{i=1}^{n} z_i \vec{B}^{(i)} = \vec{B}^{(n+1)}.$$

于是, $\mathbf{w} \in \mathrm{sol}(L)$. 由此可知, $M \subset \mathrm{sol}(L)$. 再设:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathrm{sol}(L).$$

则 $\mathbf{w} = \mathbf{v} + (\mathbf{w} - \mathbf{v})$. 我们计算

$$\sum_{i=1}^{n} (w_i - v_i)\vec{B}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} w_i \vec{B}^{(i)} - \sum_{i=1}^{n} w_i \vec{B}^{(i)} = \vec{B}^{(n+1)} - \vec{B}^{(n+1)} = \mathbf{0}_m.$$

故 $\mathbf{w} - \mathbf{v} \in \mathrm{sol}(H)$. 我们有 $\mathrm{sol}(L) \subset M$. 故 $\mathrm{sol}(L) = M$. 再根据例 *1.18*, $\mathrm{sol}(L)$ 是线性流形. □