

第二章 矩阵

3 矩阵的秩

对矩阵的初等行变换和列变换统称矩阵的初等变换.

推论 3.8 设 B 是实矩阵 A 通过有限次初等变换得到的. 则 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

证明. 设 B 是实矩阵 A 通过一次初等行 (列) 变换得到的. 根据第二章引理 3.2 (第二章引理 3.5) 可知, A 和 B 的行 (列) 秩相同. 根据第二章定理 3.6, 它们的秩相同. \square

例 3.9 计算

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 13 \end{pmatrix}.$$

计算 $\text{rank}(A)$.

解. 利用初等行变换

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & -7 \\ 0 & 1 & -9 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, $\text{rank}(A) = 2$.

另解. 利用初等列变换

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -9 & -7 \\ 4 & 1 & -9 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, $\text{rank}(A) = 2$.

例 3.10 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 证明: $\text{rank}(A) \leq \min(m, n)$.

证明. 因为 $V_r(A)$ 是 $\mathbb{R}^{1 \times m}$ 的子空间, 所以 $\dim(V_r(A)) \leq m$ (第二讲命题 1.25). 故 $\text{rank}(A) \leq m$. 因为 $V_c(A)$ 是 \mathbb{R}^n 的子空间, 所以 $\dim(V_c(A)) \leq n$ (第二讲命题 1.25). 故 $\text{rank}(A) \leq n$. \square

定义 3.11 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 如果 $\text{rank}(A) = m$, 则称 A 是行满秩的. 如果 $\text{rank}(A) = n$, 则称 A 是列满秩的. 当 $m = n$ 且 $\text{rank}(A) = n$ 时, 称 A 是满秩的.

例 3.12 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{m \times k}$. 令

$$(A, B) = (\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)}, \vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(k)}) \in \mathbb{R}^{m \times (n+k)}.$$

证明: $\text{rank}((A, B)) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

证明. 设 $C = (A, B)$. 不妨设 $\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)}$ 的一个极大线性无关组是 $\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(s)}$; $\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(k)}$ 的一个极大线性无关组是 $\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(t)}$. 则矩阵 C 的列向量在

$$V = \langle \vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(s)}, \vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(t)} \rangle$$

中. 于是, $V_c(C) \subset V$ (第二章第一讲命题 1.25). 故 $\text{rank}(C) \leq \dim(V) \leq s + t$. \square

另证. 注意到 $V_c(C) = V_c(A) + V_c(B)$. 由子空间的维数公式可知:

$$\begin{aligned}\dim(V_c(C)) &= \dim(V_c(A) + V_c(B)) \\ &= \dim(V_c(A)) + \dim(V_c(B)) - \dim(V_c(A) \cap V_c(B)) \\ &\leq \dim(V_c(A)) + \dim(V_c(B)).\end{aligned}$$

故 $\text{rank}(C) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$. \square

3.3 矩阵的转置

定义 3.13 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 矩阵 A 的转置是在 $\mathbb{R}^{n \times m}$ 中的矩阵. 它在第 j 行, 第 i 列处的元素等于 A 在第 i 行, 第 j 列处的元素, 其中 $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. 矩阵 A 的转置记为 A^t .

例 3.14 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \implies A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

可直接验证 $(A^t)^t = A$.

例 3.15 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 则 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^t)$.

证明. 不妨设 $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_r$ 是 A 的行向量中的一个极大线性无关组. 则 $\text{rank}(A) = r$. 可直接验证 $\vec{A}_1^t, \dots, \vec{A}_r^t$ 是 A^t 中列向量的一个极大线性无关组. 故 $\text{rank}(A^t) = r$.

4 线性方程组和矩阵的秩

4.1 定性部分

定理 4.1 设 L 是以矩阵 $B = (A|\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组.

(i) L 相容当且仅当 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

(ii) L 确定当且仅当 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = n$.

证明. (i) 设 L 相容. 则 $\mathbf{b} \in V_c(A)$ (见第二章第一讲例 1.4). 于是, $V_c(B) \subset V_c(A)$ (第二章第二讲命题 1.26 (ii)). 我们显然有 $V_c(A) \subset V_c(B)$. 故 $V_c(A) = V_c(B)$. 从而 $\dim(V_c(A)) = \dim(V_c(B))$. 于是, $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ (第二章第二讲定理 3.6).

反之, 设 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$. 则 $\dim(V_c(A)) = \dim(V_c(B))$ (第二章第二讲定理 3.6). 因为 $V_c(A) \subset V_c(B)$, 所以 $V_c(A) = V_c(B)$ (第二章第二讲命题 2.13). 我们得到 $\mathbf{b} \in V_c(A)$, 即 L 相容(见第二章第一讲例 1.4).

(ii) 设 L 确定. 则 L 相容. 故 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$. 下面证明 $\text{rank}(A) = n$, 即 $\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)}$ 线性无关. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \alpha_n \vec{A}^{(n)} = \mathbf{0}_m.$$

且 $(\beta_1, \dots, \beta_n)^t$ 是 L 的解. 则 $(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)^t$ 也是 L 的解. 因为 L 确定, 所以 $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. 由此可知 $\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)}$ 线性无关.

反之, 设 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = n$. 由 (i) 可知 L 相容. 故 $\mathbf{b} \in V_c(A)$. 因为 $\dim(V_c(A)) = n$, 所以 $\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)}$ 是 $V_c(A)$ 的一组基. 于是, 存在唯一的 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{b} = \lambda_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \lambda_n \vec{A}^{(n)}$. 故 $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t$ 是 L 唯一解. \square

推论 4.2 设 H 是以矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为系数矩阵的 n 元齐次线性方程组. 则 H 有非平凡解当且仅当 $\text{rank}(A) < n$.

证明. 注意到 H 是以 $B = (A | \mathbf{0}_m)$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组. 显然 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$. 根据定理 4.1 (ii). H 只有平凡解当且仅当 $\text{rank}(A) = n$. 因为 $\text{rank}(A) \leq n$ (第二章第二讲例 3.10), 所以 H 有非平凡解当且仅当 $\text{rank}(A) < n$. \square

在应用中, 由 n 个方程组成的 n 元线性方程组出现的较多. 为此, 我们给出下列两个推论.

推论 4.3 设 L 是以矩阵 $B = (A|\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组. 则 L 确定当且仅当 $\text{rank}(A) = n$.

证明. 设 L 确定. 根据定理 4.1 (ii), $\text{rank}(A) = n$. 反之, 设 $\text{rank}(A) = n$. 则

$$n = \text{rank}(A) \leq \text{rank}(B) \leq \min(n+1, n) = n.$$

故 $\text{rank}(B) = n$. 根据定理 4.1 (ii), L 确定. \square

推论 4.4 设 L 是以矩阵 $B = (A|\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组, H 是以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组. 则 L 确定当且仅当 H 确定.

证明. 由推论 4.3 可知, L 确定当且仅当 $\text{rank}(A) = n$. 再由推论 4.2 可知, $\text{rank}(A) = n$ 当且仅当 H 只有平凡解. \square .

例 4.5 科斯特利金书第七页平板受热问题.

4.2 定量部分

定理 4.6 (对偶定理, 方程组版) 设 H 是以 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组. 则

$$\dim(\text{sol}(H)) + \text{rank}(A) = n.$$

证明. 设 $r = \text{rank}(A)$. 不妨设 $\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(r)}$ 是 $V_c(A)$ 的一组基. 则对任意 $j \in \{r+1, \dots, n\}$, 存在 $\alpha_{j,1}, \dots, \alpha_{j,r}$ 使得

$$\vec{A}^{(j)} = \alpha_{j,1}\vec{A}^{(1)} + \dots + \alpha_{j,r}\vec{A}^{(r)}.$$

令 $\mathbf{v}_j = (\alpha_{j,1}, \dots, \alpha_{j,r}, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)^t$, 其中 -1 出现在第 j 个位置. 则 $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ 是 H 的解. 由 -1 在 \mathbf{v}_j 中出现的位置可断定 $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ 线性无关. 对任意 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^t \in \text{sol}(H)$,

$$\mathbf{z} + z_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \dots + z_n\mathbf{v}_n = (\beta_1, \dots, \beta_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r})^t \in \text{sol}(H), \quad (1)$$

其中 $\beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{R}$. 这是因为 $\text{sol}(H)$ 是子空间(见第二章第一讲例 1.18 和命题 1.17). 由此可知,

$$\beta_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \beta_r \vec{A}^{(r)} = \mathbf{0}_m.$$

故 $\beta_1 = \dots = \beta_r = 0$. 由 (1) 可知,

$$\mathbf{z} = (-z_{r+1})\mathbf{v}_{r+1} + \dots + (-z_n)\mathbf{v}_n.$$

进而, $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ 是 $\text{sol}(H)$ 的基. 故 $\dim(\text{sol}(H))=n-r$. \square

例 4.7 计算下列齐次线性方程组 H

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

解空间的一组基.

解. 该方程组的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

通过初等行变换得

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

于是, $\text{rank}(A) = 3$. 根据定理 4.6, $\dim(\text{sol}(H)) = 4 - 3 = 1$. 由高斯消去可知, 给定的方程组等价于:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{等价于} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}.$$

令 $x_4 = 1$. 则 $x_3 = 1$, $x_2 = -1$, $x_1 = 1$. 该方程组有非零解 $\mathbf{v} = (1, -1, 1, 1)^t$. 故 $\text{sol}(H)$ 的基是 \mathbf{v} . 写成集合的形式, 我们有 $\text{sol}(H) = \{\lambda\mathbf{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

设 $M \in \mathbb{R}^n$ 是线性流形. 则 M 的方向的维数定义为 M 的维数, 也记为 $\dim(M)$.

推论 4.8 设 L 是以 $B = (A|\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组. 如果 L 相容, 则

$$\dim(\text{sol}(L)) + \text{rank}(A) = n.$$

证明. 设 H 是以 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为系数矩阵的 n 元齐次线性方程组. 设 $\mathbf{v} \in \text{sol}(L)$. 根据第二章第一讲例 1.22,

$\text{sol}(L) = \mathbf{v} + \text{sol}(H)$. 于是, $\dim(\text{sol}(L)) = \dim(\text{sol}(H))$. 再根据定理 4.6,

$$n = \dim(\text{sol}(H)) + \text{rank}(A) = \dim(\text{sol}(L)) + \text{rank}(A). \quad \square$$

例 4.9 确定下列线性方程组 L

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 5 \end{cases}$$

的解流形.

解. 该方程组的增广矩阵

$$B = (A|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

通过初等行变换得

$$B \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, $\text{rank}(B) = \text{rank}(A) = 2$. 根据定理 4.1, L 相容. 根据定理 4.6, $\dim(\text{sol}(L)) = 5 - 2 = 3$. 由高斯消去可知, 给定方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_2 + 2x_4 = 2 \end{cases} \text{ 等价于 } \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 + x_3 + x_4 - x_5 \\ x_2 = 1 - x_4. \end{cases}$$

令 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. 我们得到 $\mathbf{v} = (2, 1, 0, 0, 0)^t$ 是 L 的一个(特)解.

再由对系数矩阵的高斯消去法可知, 以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组 H 等价于

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{等价于} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = x_3 + x_4 - x_5 \\ x_2 = -x_4. \end{cases}$$

分别令 $x_3 = 1, x_4 = x_5 = 0$; $x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$; $x_3 = x_4 = 0, x_5 = 1$. 我们得到 H 的三个线性无关的解:

$$\mathbf{w}_1 = (1, 0, 1, 0, 0)^t, \mathbf{w}_2 = (0, -1, 0, 1, 0)^t, \mathbf{w}_3 = (-1, 0, 0, 0, 1)^t.$$

故 $\text{sol}(L) = \mathbf{v} + \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle$.

5 坐标空间之间的线性映射

5.1 定义和 (与基底无关的) 性质

定义 5.1 设 $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是映射. 如果对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\underbrace{\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{y})}_{\text{保持加法}} \quad \text{和} \quad \underbrace{\phi(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\phi(\mathbf{x})}_{\text{保持数乘}},$$

则称 ϕ 是线性映射.

命题 5.2 设 $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. 映射 ϕ 是线性的当且仅当对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\underbrace{\phi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\phi(\mathbf{x}) + \beta\phi(\mathbf{y})}_{\text{保持线性运算}}.$$

证明. 设 ϕ 是线性的. 则

$$\phi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \phi(\alpha\mathbf{x}) + \phi(\beta\mathbf{y}) = \alpha\phi(\mathbf{x}) + \beta\phi(\mathbf{y}).$$

故 ϕ 保持线性运算. 反之, 取 $\alpha = \beta = 1$ 得到 ϕ 保持加法, 取 $\beta = 0$ 得到 ϕ 保持数乘. \square

命题 5.3 设 $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射. 则

(i) $\phi(\mathbf{0}_n) = \mathbf{0}_m$;

(ii) 对任意 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k\mathbf{v}_k) = \alpha_1\phi(\mathbf{v}_1) + \dots + \alpha_k\phi(\mathbf{v}_k).$$

证明. (i) 我们计算

$$\phi(\mathbf{0}_n) = \phi(\mathbf{0}_n + \mathbf{0}_n) = \phi(\mathbf{0}_n) + \phi(\mathbf{0}_n) \implies \phi(\mathbf{0}_n) = \mathbf{0}_m.$$

(ii) 对 k 归纳. 当 $k = 1, 2$ 时, 结论成立(命题 5.2). 设

$k > 2$ 且结论对 $k - 1$ 成立. 则

$$\begin{aligned}\phi\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i\right) &= \phi\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \mathbf{v}_i + \alpha_k \mathbf{v}_k\right) \\ &= \phi\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \mathbf{v}_i\right) + \phi(\alpha_k \mathbf{v}_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \phi(\mathbf{v}_i) + \alpha_k \phi(\mathbf{v}_k) \\ &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \phi(\mathbf{v}_i). \quad \square\end{aligned}$$

例 5.4 设 $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\psi_\lambda : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} &\mapsto \lambda \mathbf{x}.\end{aligned}$$

是线性的. 称之为数乘映射. 当 $\lambda=0$ 时, ψ_λ 是零映射. 当 $\lambda=1$ 时, ψ_λ 是恒同映射.

例 5.5 设 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

$$\begin{aligned}T_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{v} + \mathbf{x}.\end{aligned}$$

不是线性的. 这是因为 $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{0}) = \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

命题 5.6 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射.

(i) 如果 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ 线性相关, 则 $\phi(\mathbf{v}_1), \dots, \phi(\mathbf{v}_k)$ 也线性相关.

(ii) 如果 U 是 \mathbb{R}^n 的子空间, 则 $\phi(U)$ 是 \mathbb{R}^m 的子空间. 特别地, $\text{im}(\phi)$ 是 \mathbb{R}^m 的子空间.

(iii) 如果 W 是 \mathbb{R}^m 的子空间, 则 $\phi^{-1}(W)$ 是 \mathbb{R}^n 的子空间. 特别地, $\phi^{-1}(\{\mathbf{0}_m\})$ 是 \mathbb{R}^n 的子空间.

证明. (i) 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, 不全为零, 使得 $\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}_n$. 根据命题 5.3,

$$\mathbf{0}_m = \phi(\mathbf{0}_n) = \phi\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \phi(\mathbf{v}_i).$$

(ii) 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \phi(U)$. 则存在 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ 使得 $\phi(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$ 和 $\phi(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$. 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} &= \alpha \phi(\mathbf{u}) + \beta \phi(\mathbf{v}) \\ &= \phi(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) \quad (\text{命题 5.2}) \\ &\in \phi(U). \end{aligned}$$

根据第二章第一讲命题 1.16, $\phi(U)$ 是子空间.

(iii) 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \phi^{-1}(W)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 我们计算

$$\phi(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha \phi(\mathbf{x}) + \beta \phi(\mathbf{y}).$$

因为 $\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y}) \in W$ 且 W 是子空间, 所以 $\alpha \phi(\mathbf{x}) + \beta \phi(\mathbf{y}) \in W$. 由此得出 $\phi(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) \in W$. 从而, $\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \in \phi^{-1}(W)$. \square

定义 5.7 设 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射. 子空间 $\phi^{-1}(\{\mathbf{0}_m\})$ 称为 ϕ 的核 (*kernel*), 记为 $\ker(\phi)$.

命题 5.8 设 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射. 则 ϕ 是单射当且仅当 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_n\}$.

证明. 设 ϕ 是单射. 根据命题 5.2 (i), $\phi(\mathbf{0}_n) = \mathbf{0}_m$. 因为 ϕ 是单射, 所以 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_n\}$. 反之, 设 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_n\}$. 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{y})$. 则

$$\phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{y}) = \mathbf{0}_m.$$

于是, $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \ker(\phi)$. 因为 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_n\}$, 所以 $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$. 故 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, 即 ϕ 是单射. \square

5.2 与基底有关的性质

定理 5.9 设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基, $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ 是 \mathbb{R}^m 中的任意给定的向量. 则存在唯一的线性映射 ϕ 使得 $\phi(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j, j = 1, 2, \dots, n$.

证明. 定义

$$\begin{aligned} \phi: \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j &\mapsto \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{w}_j, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

因为 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 是基底, 所以对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 存在唯一的 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j$. 于是, ϕ 是良定义的. 显然 $\phi(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j, j = 1, 2, \dots, n$.

下面验证 ϕ 是线性的. 设

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j, \mathbf{y} = \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{v}_j, \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}.$$

则

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \phi \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j + \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{v}_j \right) \\ &= \phi \left(\sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j) \mathbf{v}_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j) \mathbf{w}_j \quad (\phi \text{ 的定义}) \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{w}_j + \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{w}_j \\ &= \phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{y}) \quad (\phi \text{ 的定义}). \end{aligned}$$

设 $\lambda \in \mathbb{R}$. 则

$$\begin{aligned}\phi(\lambda \mathbf{x}) &= \phi\left(\sum_{j=1}^n (\lambda \alpha_j) \mathbf{v}_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n (\lambda \alpha_j) \mathbf{w}_j \quad (\phi \text{ 的定义}) \\ &= \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{w}_j \\ &= \lambda \phi(\mathbf{x}) \quad (\phi \text{ 的定义}).\end{aligned}$$

最后, 我们来验证唯一性. 设 $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射满足 $\psi(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j, j = 1, 2, \dots, n$. 则

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi(\mathbf{v}_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{w}_j = \phi(\mathbf{x}).$$

故 $\psi = \phi$. \square

例 5.10 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是 \mathbb{R}^2 的标准基, 且 $\theta \in [0, 2\pi)$. 设 $R_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的线性映射满足

$$R_\theta(\mathbf{e}_1) = \cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \sin(\theta)\mathbf{e}_2, \quad R_\theta(\mathbf{e}_2) = -\sin(\theta)\mathbf{e}_1 + \cos(\theta)\mathbf{e}_2.$$

我们称 R_θ 是 \mathbb{R}^2 上的旋转 (*rotation*).

例 5.11 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 \mathbb{R}^n 的标准基. 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是满足 $f(\mathbf{e}_j) = \lambda_j, j = 1, 2, \dots, n$ 的线性映

射. 则对任意 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$,

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1x_1 + \cdots + \lambda_nx_n.$$

称 f 是 \mathbb{R}^n 上的线性函数.

例 5.12 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\phi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是满足 $\phi_A(\mathbf{e}_j) = \vec{A}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, n$. 则对任意 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi_A(\mathbf{x}) = x_1\vec{A}^{(1)} + \cdots + x_n\vec{A}^{(n)}.$$

称 ϕ_A 是由 A 诱导的线性映射.

设 H 是以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ 且 L 是以 $B = (A|\mathbf{b})$ 为增广矩阵的线性方程组. 则

$$\ker(\phi_A) = \text{sol}(H) \quad \text{且} \quad L \text{ 相容} \iff \mathbf{b} \in \text{im}(\phi).$$

引理 5.13 设 $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$ 是 $\ker(\phi)$ 的一组基.

(i) 如果 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d, \mathbf{v}_{d+1}, \dots, \mathbf{v}_{d+k}$ 线性无关, 则 $\phi(\mathbf{v}_{d+1}), \dots, \phi(\mathbf{v}_{d+k})$ 线性无关;

(ii) 如果 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d, \mathbf{v}_{d+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基, 则 $\phi(\mathbf{v}_{d+1}), \dots, \phi(\mathbf{v}_n)$ 是 $\text{im}(\phi)$ 的一组基.

证明. (i) 设 $\alpha_{d+1}, \dots, \alpha_{d+k} \in \mathbb{R}$ 使得 $\alpha_{d+1}\phi(\mathbf{v}_{d+1}) + \cdots + \alpha_{d+k}\phi(\mathbf{v}_{d+k}) = \mathbf{0}_m$. 则 $\phi(\alpha_{d+1}\mathbf{v}_{d+1} + \cdots + \alpha_{d+k}\mathbf{v}_{d+k}) = \mathbf{0}_m$.

由此可知,

$$\alpha_{d+1}\mathbf{v}_{d+1} + \cdots + \alpha_{d+k}\mathbf{v}_{d+k} \in \ker(\phi).$$

故存在 $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_{d+1}\mathbf{v}_{d+1} + \cdots + \alpha_{d+k}\mathbf{v}_{d+k} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_d\mathbf{v}_d.$$

因为 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d, \mathbf{v}_{d+1}, \dots, \mathbf{v}_{d+k}$ 是线性无关, 所以 $\alpha_{d+1} = \cdots = \alpha_{d+k} = 0$. 故 $\phi(\mathbf{v}_{d+1}), \dots, \phi(\mathbf{v}_{d+k})$ 线性无关.

(ii) 由 (i) 可知, $\phi(\mathbf{v}_{d+1}), \dots, \phi(\mathbf{v}_n)$ 线性无关. 他们显然在 $\text{im}(\phi)$ 中. 我们只要证明 $\text{im}(\phi)$ 中的任意向量都是它们的线性组合即可. 设 $\mathbf{y} \in \text{im}(\phi)$. 则存在 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\mathbf{y} = \phi(\mathbf{x})$. 因为 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基, 所以存在 $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{x} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_d\mathbf{v}_d + \beta_{d+1}\mathbf{v}_{d+1} + \cdots + \beta_n\mathbf{v}_n.$$

故

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \phi(\mathbf{x}) = \phi\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{v}_i\right) \quad (\text{定义}) \\ &= \phi\left(\sum_{i=1}^d \beta_i \mathbf{v}_i\right) + \phi\left(\sum_{j=d+1}^n \beta_j \mathbf{v}_j\right) \quad (\phi \text{ 线性}) \\ &= \phi\left(\sum_{j=d+1}^n \beta_j \mathbf{v}_j\right) \quad \left(\sum_{i=1}^d \beta_i \mathbf{v}_i \in \ker(\phi)\right) \\ &= \sum_{j=d+1}^n \beta_j \phi(\mathbf{v}_j) \quad (\phi \text{ 线性}). \quad \square \end{aligned}$$

定理 5.14 (对偶定理, 线性映射版) 设 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射. 则

$$\dim(\ker(\phi)) + \dim(\text{im}(\phi)) = n.$$

证明. 设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$ 是 $\ker(\phi)$ 的一组基. 由基扩充定理 (第二章第二讲定理 2.11), \mathbb{R}^n 有一组基 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d, \mathbf{v}_{d+1}, \dots, \mathbf{v}_n$. 由引理 5.13 (ii), $\phi(\mathbf{v}_{d+1}), \dots, \phi(\mathbf{v}_n)$ 是 $\text{im}(\phi)$ 的一组基. 于是, $\dim(\text{im}(\phi)) = n - d$. \square

推论 5.15 设 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是线性映射. 则 ϕ 是单射当且仅当它是满射.

证明. 如果 ϕ 是单射, 则 $\dim(\ker(\phi)) = 0$. 由上述定理可知 $\dim(\text{im}(\phi)) = n$. 又因为 $\text{im}(\phi) \subset \mathbb{R}^n$, 所以 $\text{im}(\phi) = \mathbb{R}^n$ (第

二章第二讲命题 2.13). 即 ϕ 是满射. 反之, 如果 ϕ 是满射, 则 $\dim(\text{im}(\phi)) = n$. 由上述定理可知, $\dim(\text{ker}(\phi)) = 0$. 在根据命题 5.8, ϕ 是单射. \square

例 5.16 利用定理 5.14 证明定理 4.6.

证明. 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, H 是以 A 为系数矩阵的 n 元齐次线性方程组, ϕ_A 是由 A 诱导的从 \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R}^m 的线性映射. 由例 5.12 可知, $\text{im}(\phi_A) = V_c(A)$ 和 $\text{ker}(\phi_A) = \text{sol}(H)$. 故定理 5.14 蕴含定理 4.6.