第三章　行列式

1　多重线性斜对称函数

在本节中, 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基.

1.1　$\mathbb{R}^n$ 上的多重线性函数

定义 1.1 映射:

$$\begin{aligned} f:\ \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{m} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) &\mapsto f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) \end{aligned}$$

称为 m 重线性的, 如果对任意 $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 我们有

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_m) \\ & = \alpha f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_m) \\ & + \beta f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_m). \end{aligned}$$

例 1.2 一重线性函数就是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性函数. 设

$$\alpha_1 = f(\mathbf{e}_1), \ldots, \alpha_n = f(\mathbf{e}_n) \in \mathbb{R}.$$

则

$$\begin{aligned} f:\quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\mapsto \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n. \end{aligned}$$

例 1.3 设

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

则 f 是 $\mathbb{R}^2$ 上的二重线性函数.

验证. 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

则

$$
\begin{aligned}
f(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v},\mathbf{y}) &= \det\begin{pmatrix}\alpha u_1+\beta v_1 & y_1\\ \alpha u_2+\beta v_2 & y_2\end{pmatrix}\\
&= (\alpha u_1+\beta v_1)y_2-(\alpha u_2+\beta v_2)y_1\\
&= \alpha(u_1y_2-u_2y_1)+\beta(v_1y_2-v_2y_1)\\
&= \alpha\det\begin{pmatrix}u_1 & y_1\\ u_2 & y_2\end{pmatrix}+\beta\det\begin{pmatrix}v_1 & y_1\\ v_2 & y_2\end{pmatrix}\\
&= \alpha f(\mathbf{u},\mathbf{y})+\beta f(\mathbf{v},\mathbf{y}).
\end{aligned}
$$

类似地, 我们可验证 $f(\mathbf{x},\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v})=\alpha f(\mathbf{x},\mathbf{u})+\beta f(\mathbf{x},\mathbf{v})$.
故 f 是二重线性函数.

例 1.4 设 f 是 $\mathbb{R}^2$ 上的二重线性函数, $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^2$, $\alpha,\beta,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. 展开 $f(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v},\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})$.
解. 利用多重线性计算:

$$
\begin{aligned}
&f(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v},\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})\\
&=\alpha f(\mathbf{u},\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})+\beta f(\mathbf{v},\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})\quad(\text{关于第一个变元线性})\\
&=\alpha(\lambda f(\mathbf{u},\mathbf{x})+\mu f(\mathbf{u},\mathbf{y}))+\beta(\lambda f(\mathbf{v},\mathbf{x})+\mu f(\mathbf{v},\mathbf{y}))\\
&\qquad(\text{关于第二个变元线性})\\
&=\alpha\lambda f(\mathbf{u},\mathbf{x})+\alpha\mu f(\mathbf{u},\mathbf{y})+\beta\lambda f(\mathbf{v},\mathbf{x})+\beta\mu f(\mathbf{v},\mathbf{y}).
\end{aligned}
$$

特别地

$$
f(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{x}+\mathbf{y})=f(\mathbf{u},\mathbf{x})+f(\mathbf{u},\mathbf{y})+f(\mathbf{v},\mathbf{x})+f(\mathbf{v},\mathbf{y})
$$

和

$$f(\alpha\mathbf{u}, \alpha\mathbf{x}) = \alpha^2 f(\mathbf{u}, \mathbf{x}).$$

引理 1.5 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上 m 重线性函数, $k\in\{1, \ldots, m\}$. 则

$$f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_m) = 0.$$

证明. 我们计算

$$\begin{aligned}
&f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_m)\\
&= f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}+\mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_m)\\
&= f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_m) + f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_m)\\
&\Longrightarrow f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_m) = 0. \quad \square
\end{aligned}$$

令

$$f(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \ldots, \mathbf{e}_{j_m}) = a_{j_1,j_2,\ldots,j_m}, \tag{1}$$

其中 $j_1, j_2, \ldots, j_m \in \{1, 2, \ldots, n\}$. 我们利用这 n^m 个实数来计算一个 m 重线性函数的表达式. 再设

$$\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^{n} x_{i,j}\mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

则

$$
\begin{aligned}
&f(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_m)\\
&=f\left(\sum_{j_1=1}^{n}x_{1,j_1}\mathbf{e}_{j_1},\sum_{j_2=1}^{n}x_{2,j_2}\mathbf{e}_{j_2},\ldots,\sum_{j_m=1}^{n}x_{m,j_m}\mathbf{e}_{j_m}\right)\\
&=\sum_{j_1=1}^{n}x_{1,j_1}f\left(\mathbf{e}_{j_1},\sum_{j_2=1}^{n}x_{2,j_2}\mathbf{e}_{j_2},\ldots,\sum_{j_m=1}^{n}x_{m,j_m}\mathbf{e}_{j_m}\right)\\
&=\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}x_{1,j_1}x_{2,j_2}f\left(\mathbf{e}_{j_1},\mathbf{e}_{j_2},\ldots,\sum_{j_m=1}^{n}x_{m,j_m}\mathbf{e}_{j_m}\right)\\
&\quad\vdots\\
&=\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_m=1}^{n}x_{1,j_1}x_{2,j_2}\cdots x_{m,j_m}f\left(\mathbf{e}_{j_1},\mathbf{e}_{j_2},\ldots,\mathbf{e}_{j_m}\right)
\end{aligned}
$$

故

$$
f(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_m)=\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_m=1}^{n}a_{j_1,j_2,\ldots,j_m}x_{1,j_1}x_{2,j_2}\cdots x_{m,j_m}. \tag{2}
$$

1.2 $\mathbb{R}^n$ 上的多重斜对称线性函数

定义 1.6 映射:

$$
\begin{aligned}
f:\underbrace{\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n}_{m}&\longrightarrow\quad\mathbb{R}\\
(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m)&\mapsto\quad f(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m)
\end{aligned}
$$

称为m 重斜对称的, 如果对任意 $i,j\in\{1,2,\ldots,m\}$,

$$
\begin{aligned}
&f(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{i-1},\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_{i+1},\ldots,\mathbf{x}_{j-1},\mathbf{x}_j,\mathbf{x}_{j+1},\ldots,\mathbf{x}_m)\\
&=-f(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{i-1},\mathbf{x}_j,\mathbf{x}_{i+1},\ldots,\mathbf{x}_{j-1},\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_{j+1},\ldots,\mathbf{x}_m).
\end{aligned}
$$

例 1.3 中二阶行列式是 2 重斜对称的. 这是因为

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}.$$

引理 1.7 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 m 重斜对称函数. 如果 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ 中有两个向量相等, 则 $f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) = 0$.

证明. 不妨设 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 := \mathbf{u}$. 因为

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_m) = -f(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_m),$$

所以

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_m) &= -f(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_m) \\ &\Longrightarrow 2f(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_m) = 0. \end{aligned}$$

因为 $2 \neq 0$, 所以 $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_m) = 0$. □

设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上 n 重斜对称线性函数. 我们利用 $m = n$ 时公式 (1) 和 (2) 推导 f 的表达式. 由引理 1.7, 如果下标 $j_1, \ldots, j_n$ 中有两个相同, 则 $a_{j_1,\ldots,j_n} = 0$. 若 $j_1, \ldots, j_n$ 两两不同, 则这些下标对应一个置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}.$$

即 $(j_1, \ldots, j_n) = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$. 再根据 (2), 我们有

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)} x_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \cdots x_{n,\sigma(n)}. \tag{3}$$

设 $w = f(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. 我们来研究 w 和 $a_{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)}$ 之间的关系. 根据 (1),

$$a_{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)} = f(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}).$$

下面我们证明:

断言. $a_{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)} = \epsilon_\sigma w.$

证明. 设 $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$, 其中 $\tau_1, \ldots, \tau_k$ 是对换. 如果 $k = 1$, 则可设 $\sigma = (i, j)$. 于是,

$$\begin{aligned} a_{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)} &= f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{i+1}, \ldots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{j+1}, \ldots, \mathbf{x}_n) \\ &= -f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \ldots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}, \ldots, \mathbf{x}_n) \\ &= -w. \end{aligned}$$

断言在 $k = 1$ 时成立. 设 $k > 1$ 且断言对 $k - 1$ 成立. 考虑 k 时. 令 $\pi = \tau_2 \cdots \tau_k$. 则 $\sigma = \tau_1 \pi$. 我们有

$$\begin{aligned} a_{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)} &= f(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}) \\ &= f(\mathbf{e}_{\tau_1\pi(1)}, \ldots, \mathbf{e}_{\tau_1\pi(n)}) \\ &= -f(\mathbf{e}_{\pi(1)}, \ldots, \mathbf{e}_{\pi(n)}) \\ &= -\epsilon_\pi f(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \quad (\text{归纳假设}) \\ &= \epsilon_\sigma w. \end{aligned}$$

断言成立.

由此断言和 (3) 可知

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) = w \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma x_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \cdots x_{n,\sigma(n)}. \tag{4}$$

于是, 每个 $\mathbb{R}^n$ 上的 n 重斜线性函数都具有形式 (4) 且具有上述形式的函数必然 n 重斜线性, 其中 w 可取任意实数.

2 行列式的定义和基本性质

定义 2.1 行列式函数:

$$\begin{aligned} \det: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) &\mapsto \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma x_{1,\sigma(1)} \cdots x_{n,\sigma(n)}, \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1,j} \\ \vdots \\ x_{n,j} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

由 (4) 可知, det 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 n 重线性斜对称函数.

注解 2.2 根据 (3) 中 w 的定义, $\det(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$.

定义 2.3 设 $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 矩阵 A 的行列式是

$$\det\left(\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}\right). \quad \textit{(函数版)}$$

等价地,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}. \quad \textit{(系数版)} \tag{5}$$

矩阵 A 的行列式记为 $\det(A)$ 或 $|A|$.

例 2.4 *根据注解 2.2,*

$$\det(E_n) = \det(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1.$$

根据引理 1.5, 如果方阵 A 中有一列等于零, 则 $\det(A) = 0$.

由函数版的定义可知, $\det(A)$ 是关于 A 的列的 n 重线性斜函数. 由此得出下列基本性质.

(L1) 如果 $\vec{A}^{(j)} = \alpha \mathbf{v}$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

$$\det(A) = \alpha \det\left(\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(j-1)}, \mathbf{v}, \vec{A}^{(j+1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}\right).$$

(L2) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

(L3) 设 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 且 $\vec{A}^{(j)} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. 则

$$\begin{aligned}\det(A) = &\det\left(\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(j-1)}, \mathbf{u}, \vec{A}^{(j+1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}\right) \\ &+ \det\left(\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(j-1)}, \mathbf{v}, \vec{A}^{(j+1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}\right).\end{aligned}$$

(L4) 设 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 且 $\vec{A}^{(j)} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mathbf{v}_k$, 其中 $\alpha_i \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$. 则

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \det\left(\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(j-1)}, \mathbf{v}_k, \vec{A}^{(j+1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}\right).$$

在上述性质中 (L1) 和 (L3) 成立是因为多重线性函数关于一个变元是线性的. 性质 (L4) 是 (L1) 和 (L3) 的推论(用归

纳法直接可得). 性质 (L2) 可以通过 n 次利用 (L1) 得出.
具体过程如下

$$\begin{aligned}
\det(\alpha A) &= \det(\alpha\vec{A}^{(1)}, \alpha\vec{A}^{(2)}, \ldots, \alpha\vec{A}^{(n)}) \\
&= \alpha\det(\vec{A}^{(1)}, \alpha\vec{A}^{(2)}, \ldots, \alpha\vec{A}^{(n)}) \quad (\text{对第一列用 (L1)}) \\
&= \alpha^2\det(\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \alpha\vec{A}^{(3)} \ldots, \alpha\vec{A}^{(n)}) \quad (\text{对第二列用 (L1)}) \\
&\vdots \\
&= \alpha^n\det(\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}) \\
&= \alpha^n\det(A).
\end{aligned}$$

例 2.5 证明*:* $D_n = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 的行列式等于 $\lambda_1\cdots\lambda_n$.

证明. 我们计算

$$\begin{aligned}
\det(D_n) &= \det(\lambda_1\mathbf{e}_1, \lambda_2\mathbf{e}_2, \ldots, \lambda_n\mathbf{e}_n) \\
&= \lambda_1\det(\mathbf{e}_1, \lambda_2\mathbf{e}_2, \ldots, \lambda_n\mathbf{e}_n) \quad (\text{对第一列用 (L1)}) \\
&= \lambda_1\lambda_2\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \lambda_3\mathbf{e}_3 \ldots, \lambda_n\mathbf{e}_n) \quad (\text{对第二列用 (L1)}) \\
&\vdots \\
&= \lambda_1\cdots\lambda_n\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = \lambda_1\cdots\lambda_n.
\end{aligned}$$

利用行列式函数是斜对称的和性质 (L4), 我们得到:

(S1) 设交换方阵 A 中两不同列的位置得到方阵 B, 则 $\det(B) = -\det(A)$.

(S2) 如果方阵 A 中有两列相同, 则 $\det(A) = 0$;

(S3) 如果 A 中某列是其它列的线性组合, 则 $\det(A) = 0$.

(S4) 把 A 中某一列的倍式加到另一列上得到矩阵 B, 则 $\det(B) = \det(A)$.

性质 (S1) 来自斜对称函数的定义. 性质 (S2) 是引理 1.7 的直接推论. 性质 (S3) 推导过程如下: 不妨设

$$\vec{A}^{(n)} = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \vec{A}^{(j)}.$$

则

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det(\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \ldots, \vec{A}^{(n-1)}, \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \vec{A}^{(j)}) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \det(\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \ldots, \vec{A}^{(n-1)}, \vec{A}^{(j)}) \quad (\text{对第 } n \text{ 列用 (L4)}) \\
&= 0. \quad (\text{对和式中每个行列式用 (S2)})
\end{aligned}$$

性质 (S4) 的推导过程与 (S3) 类似. 具体过程如下, 不妨设

$$B = (\vec{A}^{(1)} + \alpha \vec{A}^{(2)}, \vec{A}^{(2)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}),$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}$. 则

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \det(\vec{A}^{(1)} + \alpha \vec{A}^{(2)}, \vec{A}^{(2)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}) \\
&= \det(A) + \alpha \det(\vec{A}^{(2)}, \vec{A}^{(2)}, \ldots, \vec{A}^{(n-1)}) \quad (\text{对第一列用 (L4)}) \\
&= \det(A). \quad (\text{对第二个行列式用 (S2)})
\end{aligned}$$

例 2.6 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 证明*:* A 不满秩蕴含 $\det(A) = 0$.

证明. 因为 A 不满秩, 所以 A 的列向量线性相关. 故某个列向量是其它列的线性组合*(*第二章第一讲命题 *1.11 (iii))*. 由性质 *(S3)* 可知, $\det(A) = 0$.

例 2.7 计算 n 阶初等矩阵的行列式.

解. 由性质 *(S1)* 可知, $\det(F_{i,j}^{(n)}) = -1$ 在 $i \neq j$ 时成立. 否则其行列式等于 1. 由性质 *(S4)* 可知, $\det(F_{i,j}^{(n)})(\alpha) = 1$. 由性质 *(L1)* 可知, $\det(F_i^{(n)}(\lambda)) = \lambda$.

下面我们来研究系数版的行列式定义.

例 2.8 设

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned}\det(A_2) &= \epsilon_e a_{1,e(1)} a_{2,e(2)} + \epsilon_{(12)} a_{1,(12)(1)} a_{2,(12)(2)} \\ &= a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det(A_3) &= \epsilon_e a_{1,e(1)} a_{2,e(2)} a_{3,e(3)} + \epsilon_{(12)} a_{1,(12)(1)} a_{2,(12)(2)} a_{3,(12)(3)} \\ &+ \epsilon_{(13)} a_{1,(13)(1)} a_{2,(13)(2)} a_{3,(13)(3)} + \epsilon_{(23)} a_{1,(23)(1)} a_{2,(23)(2)} a_{3,(23)(3)} \\ &+ \epsilon_{(123)} a_{1,(123)(1)} a_{2,(123)(2)} a_{3,(123)(3)} \\ &+ \epsilon_{(213)} a_{1,(213)(1)} a_{2,(213)(2)} a_{3,(213)(3)} \\ &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} \\ &- a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} \\ &+ a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} \\ &+ a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}.\end{aligned}$$

命题 2.9 设

$$T_u = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

和

$$T_\ell = \begin{pmatrix} \ell_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{2,1} & \ell_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n,1} & \ell_{n,2} & \ell_{n,3} & \cdots & \ell_{n,n} \end{pmatrix}$$

则

$$\det(T_u) = u_{1,1}u_{2,2}\cdots u_{n,n} \quad \text{和} \quad \det(T_\ell) = \ell_{1,1}\ell_{2,2}\cdots \ell_{n,n}.$$

证明. 我们来证明上三角情形, 下三角情形类似.

设 $T_u = (u_{i,j})_{n\times n}$. 则当 $i < j$ 时, $u_{i,j} = 0$. 在 $\det(T_u)$ 的和式表示 (5) 中的一项是

$$a_\sigma = \epsilon_\sigma u_{1,\sigma(1)}\cdots u_{n,\sigma(n)},$$

其中 $\sigma \in S_n$. 如果存在某个 $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, 使得 $i > \sigma(i)$, 则 $a_\sigma = 0$. 于是, $a_\sigma \neq 0$ 蕴含 $i \leq \sigma(i)$ 对所有 $i = 1,2\ldots,n$ 成立. 故 σ 必然是恒同映射. 我们得到

$$\det(T_u) = a_e = \epsilon_e u_{1,e(1)}\cdots u_{n,e(n)} = u_{1,1}\cdots u_{n,n}. \quad \square$$

下面我们通过矩阵转置把上面关于列的性质推广到行的情形.

命题 2.10 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 则 $\det(A) = \det(A^t)$.

证明. 设 $A = (a_{i,j})_{n\times n}$ 和 $A^t = (a'_{i,j})_{n\times n}$. 则 $a'_{i,j} = a_{j,i}$, $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$. 根据 (5),

$$\det(A^t) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon_\sigma a'_{1,\sigma(1)}\cdots a'_{n,(n)}.$$

由转置定义可知,

$$\det(A^t) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}.$$

该和式可重写为:

$$\det(A^t) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),\sigma^{-1}\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n),\sigma^{-1}\sigma(n)}.$$

因为 $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} = \{1, 2, \ldots, n\}$, 所以

$$\det(A^t) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}.$$

因为 $\epsilon_\sigma = \epsilon_{\sigma^{-1}}$, 所以

$$\det(A^t) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma^{-1}} a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}.$$

再因为 $S_n = \{\sigma^{-1} \,|\, \sigma \in S_n\}$, 所以

$$\det(A^t) = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \epsilon_{\sigma^{-1}} a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}.$$

根据 (5), $\det(A^t) = \det(A)$. $\square$

上述命题蕴含我们验证过的性质 (L1) 到 (L4) 和 (S1) 到 (S4) 中所有列向量都可以换成行向量. 例如性质: "交换矩阵两不同行行列式变号", 可以通过以下方法验证. 设 B 是交换 A 的第 i 行和第 j 行得到的矩阵, 其中 $i \neq j$. 则把 A^t 中第 i 列和第 j 列交换后得到的矩阵是 B^t. 由性质 (S1) 可知 $\det(B^t) = -\det(A^t)$. 再根据命题 2.10, $\det(B) = \det(B^t)$ 和 $\det(A) = \det(A^t)$. 故 $\det(B) = -\det(A)$.

例 2.11 设 $A \in \mathrm{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ 斜对称. 证明: $\det(A) = 0$.

证明. 因为 $A^t = -A$, 所以 $\det(A) = \det(-A)$ (命题 2.10). 根据性质 (L2),

$$\det(-A) = (-1)^{2n+1}\det(A) = -\det(A).$$

于是, $\det(A) = -\det(A)$. 从而 $\det(A) = 0$.

计算行列式的一个基本方法是通过第一和第二类初等变换把给定的行列式对应的矩阵化为上三角或下三角形矩阵, 然后利用命题 2.9 计算给定行列式的值. 需要注意的是: 应用一次第一类初等变换行列式的值会变号(性质(S1)); 而应用一次第二类初等变换行列式的值不变(性质(S4)). 当利用第三类初等变换时, 行列式要乘以适当的实数.

例 2.12 计算矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的行列式的值.

证明. 利用第二类初等行变换可得

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -8.$$

利用第一类初等行变换可得

$$\det(B) = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

例 2.13 展开 n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$

的行列式.

解. 多次应用性质 *(S4)* 可得

$$\det(A) = \begin{pmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

根据性质 *(L1)* 得

$$\det(A) = (a+(n-1)b)\begin{pmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

再利用第二类初等行变换, 我们有

$$\det(A) = (a+(n-1)b)\begin{pmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

定理 2.14 设 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 则 $\det(A)\neq 0$ 当且仅当 $\operatorname{rank}(A)=n$.

证明. 根据例 2.6, 我们有 $\det(A) \neq 0 \implies \operatorname{rank}(A) = n$. 反之, 设 $\operatorname{rank}(A) = n$. 则通过第一和第二类初等行变换, 我们可以把 A 变成阶梯型(上三角)矩阵

$$T_u = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix}.$$

于是, $\det(A) = \pm\det(T_u)$. 根据第二章第二讲引理 3.2, $\operatorname{rank}(T_u) = n$. 我们推出 T_u 对角线上的元素都非零. 根据命题 2.9, $\det(T_u) \neq 0$. 从而 $\det(A) \neq 0$. □

推论 2.15 设 $A{\in}\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 则 $\det(A){\neq}0$ 当且仅当 A 可逆.

证明. 由上述定理和第二章第五讲定理 7.14 直接可得. □

例 2.16 证明实数上的奇数阶斜对称矩阵都不可逆.

证明. 由例 *2.11* 可知, 任何奇数阶斜对称矩阵的行列式都等于零. 根据上述推论, 奇数阶斜对称矩阵都不可逆.

3 行列式的进一步性质

3.1 行列式按一行(列)展开

定义 3.1 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. 去掉 A 中第 i 行和第 j 列得到的 $(n-1)$ 阶方阵的行列式称为 A 关于 i 行和 j 列的$(n-1)$ 阶余子式*(co-minor)*, 记为 $M_{i,j}$. 而 $A_{i,j} := (-1)^{i+j} M_{i,j}$ 称为 A 关于 i 行和 j 列的代数余子式.

例 3.2 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

则

$$M_{1,1} = \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad A_{2,3} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = -M_{2,3}.$$

定理 3.3 设 $A=(a_{i,j})\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 则对于任意的 $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$,

$$\underbrace{\det(A)=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}A_{i,k}}_{\text{按一行展开}}\quad \text{和}\quad \underbrace{\det(A)=\sum_{k=1}^{n}a_{k,j}A_{k,j}}_{\text{按一列展开}}.$$

证明. 断言 *1.* 设 A 中最后一行中前 $(n-1)$ 个元素都等于零. 则 $\det(A)=a_{n,n}A_{n,n}$.

断言 *1* 的证明. 由行列式的定义可知

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon_\sigma a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{n-1,\sigma(n-1)}a_{n,\sigma(n)}.$$

因为当 $n\neq\sigma(n)$ 时, $a_{n,\sigma(n)}=0$, 所以

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n,\sigma(n)=n}\epsilon_\sigma a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{n-1,\sigma(n-1)}a_{n,n}.$$

故

$$\det(A)=a_{n,n}\sum_{\tau\in S_{n-1}}\epsilon_\tau a_{1,\tau(1)}\cdots a_{n-1,\tau(n-1)}=a_{n,n}M_{n,n}=a_{n,n}A_{n,n}.$$

断言 1 成立.

断言 *2.* 设 A 中第 i 行中只有第 j 个元素非零. 则 $\det(A)=a_{i,j}A_{i,j}$.

断言 *2* 的证明. 把 A 中第 i 行与 $\vec{A}_{i+1},\ldots,\vec{A}_n$ 逐个对调, 然后把所得矩阵的第 j 列与第 $(j+1)$ 列至 第 n 列逐个对调,

我们得到矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i-1,j} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & a_{i+1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,j-1} & a_{n-1,j+1} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{n-1,j} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i,j} \end{pmatrix}.$$

由断言 1, $\det(B) = a_{i,j}M_{i,j}$. 由行列式性质 (S1),

$$\det(B) = (-1)^{n-i+n-j}\det(A) = (-1)^{i+j}\det(A) \implies \det(A) = a_{i,j}A_{i,j}.$$

断言 2 成立.

下面考虑一般情形. 由行列式的多重线性和断言 2 可知

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} \det \begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vdots \\ \vec{A}_{i-1} \\ 0\cdots 0, a_{i,j}, 0, \cdots 0 \\ \vec{A}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{A}_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j}.$$

我们证明了按行展开的公式. 按列展开的公式可以类似证明，或通过行列式的转置公式和行展开公式证明. □

例 3.4 展开行列式

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

解. 利用上述定理证明中的断言 *2*, 我们有

$$D = -2 \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

再利用第二类初等行变换得

$$D = -10 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 20 \times 6 \times (-7 - 2) = -1080.$$

例 3.5 *Vandermonde* 行列式. 设 $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$. 求次数为 $n-1$ 次实系数多项式

$$f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

使得

$$f(\alpha_i) = \beta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

即

$$a_0+a_1\alpha_i+\cdots+a_{n-2}\alpha_i^{n-2}+a_{n-1}\alpha_i^{n-1}=\beta_i,\quad i=1,2,\ldots,n,$$

其中 $a_0,a_1,\ldots,a_{n-2},a_{n-1}$ 是 n 个未知数. 利用矩阵表示, 我们有

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-2} & \alpha_1^{n-1}\\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-2} & \alpha_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-2} & \alpha_{n-1}^{n-1}\\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-2} & \alpha_n^{n-1}\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_{n-1}\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_{n-1}\\ \beta_n\end{pmatrix}.$$

记 $V_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\det(A)$. 称之为关于 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 的 Vandermonde 行列式. 该行列式也简记为 V_n.

展开 V_n 有多种方法. 我们这里采用初等变换和数学归纳法. 当 $n=2$ 时,

$$V_2=\begin{vmatrix}1 & \alpha_1\\ 1 & \alpha_2\end{vmatrix}=\alpha_2-\alpha_1.$$

$$\begin{aligned}V_3=\begin{vmatrix}1 & \alpha_1 & \alpha_1^2\\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2\\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2\end{vmatrix}&=\begin{vmatrix}1 & \alpha_1 & \alpha_1^2\\ 0 & \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_2^2-\alpha_1^2\\ 0 & \alpha_3-\alpha_1 & \alpha_3^2-\alpha_1^2\end{vmatrix}\\ &=(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\begin{vmatrix}1 & \alpha_1 & \alpha_1^2\\ 0 & 1 & \alpha_2+\alpha_1\\ 0 & 1 & \alpha_3+\alpha_1\end{vmatrix}=(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2).\end{aligned}$$

猜测: $V_n=\prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_j-\alpha_i)$. 设 $n>3$ 且阶数小于 n 时

猜测成立. 当 n 时,

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-2} & \alpha_1^{n-2}(\alpha_1-\alpha_n) \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-2} & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2-\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-2} & \alpha_{n-1}^{n-2}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-2} & 0 \end{vmatrix} \quad (\ AF_{n-1,n}(-\alpha_n)\ )$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-3}(\alpha_1-\alpha_n) & \alpha_1^{n-2}(\alpha_1-\alpha_n) \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-3}(\alpha_2-\alpha_n) & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2-\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-3}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) & \alpha_{n-1}^{n-2}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) \\ 1 & \alpha_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(\ AF_{n-1,n}(-\alpha_n)F_{n-2,n-1}(-\alpha_n)\ )$$

$$= \cdots$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1-\alpha_n & \cdots & \alpha_1^{n-3}(\alpha_1-\alpha_n) & \alpha_1^{n-2}(\alpha_1-\alpha_n) \\ 1 & \alpha_2-\alpha_n & \cdots & \alpha_2^{n-3}(\alpha_2-\alpha_n) & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2-\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1}-\alpha_n & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-3}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) & \alpha_{n-1}^{n-2}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(\ AF_{n-1,n}(-\alpha_n)F_{n-2,n-1}(-\alpha_n)\cdots F_{1,2}(-\alpha_n)\ )$$

$$= (-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n-1}(\alpha_i-\alpha_n)V(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1}(\alpha_n-\alpha_i)V(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1}(\alpha_n-\alpha_i)\prod_{1\le i<j\le n-1}(\alpha_j-\alpha_i)$$

$$= \prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_j-\alpha_i).$$

猜测成立. 由此可知, A 满秩当且仅当 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 两两不同. 此时, 所求多项式存在且唯一.

例 3.6 计算

$$D_n = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

解. 直接计算得 $D_1 = 2$, $D_2 = 3$,

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4.$$

猜测: $D_n = n + 1$.

设 $n > 3$ 且当阶数小于 n 时猜测成立. 按第一列展开

得

$$D_n = 2D_{n-1} - \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 2D_{n-1} - D_{n-2} = 2n - (n-1) = n+1.$$

猜测成立.