

## 第三章 行列式

### 3.2 分块矩阵的行列式

**定理 3.1** 设  $A \in M_m(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_n(\mathbb{R})$  和  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . 则

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B).$$

证明. (矩阵版) 对  $m$  归纳. 当  $m = 1$  时, 按第一列展开得

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & c_1, \dots, c_n \\ O & B \end{pmatrix} = a \det(B).$$

结论成立. 设  $m > 1$  且  $A$  是  $m - 1$  阶方阵时结论成立. 设  $A = (a_{i,j})_{m \times m}$ . 则

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} & & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} & & C \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m} & & \\ & & O & & & B \end{pmatrix} \\ &= a_{1,1}A_{1,1} \det(B) + a_{2,1}A_{2,1} \det(B) + \cdots + a_{m,1}A_{m,1} \det(B) \\ &\text{(按第一列展开并利用归纳假设, 其中 } A_{i,j} \text{ 代表 } A \text{ 的代数余子式)} \\ &= (a_{1,1}A_{1,1} + a_{2,1}A_{2,1} + \cdots + a_{m,1}A_{m,1}) \det(B) \\ &= \det(A) \det(B). \quad \square \end{aligned}$$

(映射版) 把行列式

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$$

看成关于  $A$  的列的  $m$  重线性斜对称函数. 即定义:

$$f : \underbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_m \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(m)}) \mapsto \det \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}.$$

由第三章第一讲等式 (4) 可知,  $f(\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(m)}) = w \det(A)$ , 其中  $w = f(\vec{E}_m^{(1)}, \dots, \vec{E}_m^{(m)})$ . 由  $f$  的定义可知和按第一列展开 ( $m$  次), 我们得到

$$w = f(\vec{E}_m^{(1)}, \dots, \vec{E}_m^{(m)}) = \det \begin{pmatrix} E_m & C \\ O & B \end{pmatrix} = \det(B).$$

故

$$f(\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(m)}) = \det(A) \det(B) = \det \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}. \quad \square$$

**例 3.2** 计算

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{vmatrix}.$$

解.

$$D = - \begin{vmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -36.$$

**推论 3.3** 设  $A \in M_m(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_n(\mathbb{R})$  和  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . 则

$$\det \begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix} = (-1)^{mn} \det(A) \det(B).$$

证明. 把子矩阵

$$\begin{pmatrix} A \\ O \end{pmatrix}$$

中的第一列逐个与前  $n$  列对调, 然后把第二列与它前面的  $n$  列逐个对调, ... . 经过  $mn$  次列对调后, 我们得到矩阵

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}.$$

于是

$$\det \begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix} = (-1)^{mn} \det \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = (-1)^{mn} \det(A) \det(B),$$

其中最后一个等式来自定理 3.1.  $\square$

### 3.3 乘法定理

**定理 3.4** 设  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . 则

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

证明. (矩阵法) 如果  $A$  或  $B$  不满秩, 则  $AB$  也不满秩(第二章第四讲定理 6.25 (i)). 故  $\det(AB) = 0$  (第三章第一讲定理 2.14). 同理  $\det(A) \det(B) = 0$ . 故定理成立.

断言. 设  $C, M \in M_n(\mathbb{R})$  且  $C$  是初等矩阵. 则

$$\det(CM) = \det(C) \det(M) = \det(MC).$$

断言的证明. 设  $C = F_{i,j}$ . 如果  $i = j$ , 则  $C = E$ . 断言显然成立. 如果  $i \neq j$ . 则  $\det(CM) = \det(MC) = -\det(M)$ . 而  $\det(C) \det(M) = -\det(M)$ . 断言也成立.

设  $C = F_{i,j}(\alpha)$ ,  $i \neq j$ . 则  $\det(CM)$ ,  $\det(MC)$  和  $\det(C) \det(M)$  都等于  $\det(M)$ . 故断言成立.

设  $C = F_i(\lambda)$ . 则  $\det(CM)$ ,  $\det(MC)$  和  $\det(C) \det(M)$  都等于  $\lambda \det(M)$ . 断言成立.

设矩阵  $A$  满秩. 则存在初等矩阵  $C_1, C_2, \dots, C_p$  使得

$$A = C_1 C_2 \cdots C_p$$

(第二章第五讲定理 7.14 和第六讲推论 8.6). 由断言可知,

$$\det(A) = \det(C_1) \det(C_2 \cdots C_p) = \det(C_1) \det(C_2) \cdots \det(C_p). \quad (1)$$

类似地

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(C_1(C_2 \cdots C_p B)) \\ &= \det(C_1) \det(C_2 \cdots C_p B) \quad (\text{断言}) \\ &= \det(C_1) \det(C_2) \cdots \det(C_p) \det(B) \\ &= \det(A) \det(B) \quad ((1)).\end{aligned}$$

定理成立.

(映射法) 定义:

$$\begin{aligned}f: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(n)}) &\mapsto \det(A\vec{B}^{(1)}, \dots, A\vec{B}^{(n)}) = \det(AB)\end{aligned}$$

由行列式的多重线性和矩阵乘法的分配律可直接验证  $f$  是多重线性的. 再根据行列式的斜对称性可知  $f$  也是斜对称的. 由第三章第一讲等式 (4) 可知,

$$f(\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(n)}) = w \det(B),$$

其中  $w = f(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ . 故

$$w = \det(AE_n) = \det(A).$$

于是,  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .  $\square$

**注解 3.5** 由上述定理可知,

$$\det(BA) = \det(B) \det(A) = \det(AB).$$

故  $\det(AB) = \det(BA)$ . 即行列式是关于方阵乘法的交换不变量.

### 例 3.6 展开

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos(\theta_1) & \cos(2\theta_1) \\ 1 & \cos(\theta_2) & \cos(2\theta_2) \\ 1 & \cos(\theta_3) & \cos(2\theta_3) \end{vmatrix}.$$

解. 由行列式乘积定理, 我们有

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos(\theta_1) & 2\cos(\theta_1)^2 - 1 \\ 1 & \cos(\theta_2) & 2\cos(\theta_2)^2 - 1 \\ 1 & \cos(\theta_3) & 2\cos(\theta_3)^2 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos(\theta_1) & \cos(\theta_1)^2 \\ 1 & \cos(\theta_2) & \cos(\theta_2)^2 \\ 1 & \cos(\theta_3) & \cos(\theta_3)^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

故  $D = 2(\cos(\theta_3) - \cos(\theta_1))(\cos(\theta_3) - \cos(\theta_2))(\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1))$ .

例 3.7 设  $A = ((\alpha_i + \beta_j)^{n-1})_{n \times n}$ . 展开  $\det(A)$ .

解. 注意到

$$\begin{aligned} (\alpha_i + \beta_j)^{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \alpha_i^k \beta_j^{n-1-k} \\ &= \left( \binom{n-1}{0} \alpha_i^0, \binom{n-1}{1} \alpha_i, \dots, \binom{n-1}{n-1} \alpha_i^{n-1} \right) \begin{pmatrix} \beta_j^{n-1} \\ \beta_j^{n-2} \\ \vdots \\ \beta_j^0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

故

$$A = \begin{pmatrix} \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1}\alpha_1 & \cdots & \binom{n-1}{n-1}\alpha_1^{n-1} \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1}\alpha_2 & \cdots & \binom{n-1}{n-1}\alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1}\alpha_n & \cdots & \binom{n-1}{n-1}\alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1^{(n-1)} & \beta_2^{n-1} & \cdots & \beta_n^{n-1} \\ \beta_1^{(n-2)} & \beta_2^{n-2} & \cdots & \beta_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

由行列式的基本性质和乘积定理可知,

$$\det(A) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)(\beta_j - \beta_i).$$

### 3.4 伴随矩阵

设  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Kronecker 符号

$$\delta_{i,j} := \begin{cases} 0 & \text{如果 } i \neq j, \\ 1 & \text{如果 } i = j \end{cases}.$$

利用 Kronecker 符号, 单位矩阵可以表示为  $(\delta_{i,j})_{n \times n}$ .

**引理 3.8** 设  $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ . 则

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} A_{j,k} = \delta_{i,j} |A| \quad \text{和} \quad \sum_{k=1}^n a_{k,j} A_{k,i} = \delta_{i,j} |A|,$$

其中  $A_{i,j}$  代表  $A$  关于第  $i$  行第  $j$  列的代数余子式,  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

证明. 当  $i = j$  时, 结论由第三章第一讲定理 3.3 直接得出. 设  $i \neq j$ . 令  $B$  是把  $A$  中第  $j$  行换成  $\vec{A}_i$  后得到的矩阵. 因为  $B$  中由两行相同, 所以  $\det(B) = 0$ . 把  $B$  按第  $j$  列展开, 再用第三章第一讲定理 3.3 得出

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} A_{j,k} = \det(B) = 0.$$

另一个等式可通过对列进行类似操作得出.  $\square$

**定义 3.9** 设  $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ . 矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \cdots & A_{n,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \cdots & A_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1,n} & A_{2,n} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

称为  $A$  的伴随矩阵. 记为  $A^\vee$ .

**引理 3.10** 利用上述符号, 我们有

$$A^\vee A = AA^\vee = |A|E.$$

证明. 设  $A^\vee = (b_{i,j})_{n \times n}$ . 则  $A^\vee A$  中位于第  $i$  行第  $j$  列处的元素是

$$\sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^n A_{k,i} a_{k,j} = \delta_{i,j} |A| \quad (\because \text{引理 3.8}).$$



故  $A^\vee A = |A|E_n$ . 类似地,  $AA^\vee$  中位于第  $i$  行第  $j$  列处的元素是

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} A_{j,k} = \delta_{i,j} |A| \quad (\because \text{引理 3.8}).$$

故  $AA^\vee = |A|E_n$ .  $\square$ .

**定理 3.11** 设  $A \in M_n(\mathbb{R})$  可逆. 则

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^\vee.$$

证明. 根据引理 3.10, 我们有

$$\left( \frac{1}{|A|} A^\vee \right) A = \frac{1}{|A|} (A^\vee A) = \frac{1}{|A|} |A| E = E.$$

由第二章第五讲推论 7.16, 定理成立.  $\square$

**注解 3.12** 设  $A$  可逆. 则

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{1,1}}{|A|} & \frac{A_{2,1}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n,1}}{|A|} \\ \frac{A_{1,2}}{|A|} & \frac{A_{2,2}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n,2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1,n}}{|A|} & \frac{A_{2,n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n,n}}{|A|} \end{pmatrix}.$$

该公式说明当  $A$  中的元素都是整数时,  $A^{-1}$  中的元素都是以  $|A|$  为公分母有理数.

## 4 行列式的应用

### 4.1 Cramer 法则

**定理 4.1** 设  $A \in M_n(\mathbb{R})$  和  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^t \in \mathbb{R}^n$ . 再设  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$  是未知数向量. 则方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  确定当且仅当  $A$  可逆. 此时, 该方程组的唯一解是

$$x_i = \frac{\det(\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(i-1)}, \mathbf{b}, \vec{A}^{(i+1)}, \dots, \vec{A}^{(n)})}{\det(A)},$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

证明. 定理中的必要充分条件是第二章第三讲推论 4.3 和第五讲的定理 7.14 的直接推论. 再设  $A$  可逆. 则  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ . 根据定理 3.11 和注释 3.12,

$$x_i = \frac{1}{|A|} (A_{1,i}, \dots, A_{n,i})\mathbf{b}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中  $A_{k,i}$  是矩阵  $A$  关于第  $k$  行和第  $i$  列的代数余子式. 而

$$(A_{1,i}, \dots, A_{n,i})\mathbf{b} = \sum_{k=1}^n b_k A_{k,i}.$$

它是行列式  $\det(\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(i-1)}, \mathbf{b}, \vec{A}^{(i+1)}, \dots, \vec{A}^{(n)})$  按第  $i$  列展开的表达式(第三章第一讲定理 3.3).  $\square$

**注解 4.2** 利用上述定理中的符号, 令

$$A_i = \det(\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(i-1)}, \mathbf{b}, \vec{A}^{(i+1)}, \dots, \vec{A}^{(n)}).$$

则当  $A$  可逆时, 方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的唯一解是

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}.$$

该公式说明当  $A$  中的元素和  $\mathbf{b}$  中的坐标都是整数时, 方程组的解是以  $\det(A)$  为公分母有理数.

## 4.2 子式和矩阵的秩

**定义 4.3** 设  $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$  不必两两不同,  $j_1, \dots, j_k \in \{1, 2, \dots, n\}$  也不必两两不同. 则行列式

$$\det \begin{pmatrix} a_{i_1, j_1} & a_{i_1, j_2} & \cdots & a_{i_1, j_k} \\ a_{i_2, j_1} & a_{i_2, j_2} & \cdots & a_{i_2, j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k, j_1} & a_{i_k, j_2} & \cdots & a_{i_k, j_k} \end{pmatrix}$$

称为  $A$  的一个  $k$  阶子式(minor). 记为

$$M_A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}.$$

**例 4.4** 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

则

$$M_A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad M_A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

显然, 如果  $i_1, \dots, i_k$  中有两个相同或  $j_1, \dots, j_k$  中有两个相同, 则对应的子式等于零.

**定理 4.5** 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  非零. 则下列命题等价.

(i)  $\text{rank}(A) = r$ ;

(ii)  $A$  中所有大于  $r$  阶的子式都等于零且存在一个  $r$  阶子式非零;

(iii)  $A$  中所有  $r+1$  阶的子式都等于零且存在一个  $r$  阶子式非零.

证明. (i)  $\implies$  (ii) 假设

$$M_A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \neq 0$$

且  $k > r$ . 不妨设  $i_1 < \dots < i_k$  和  $j_1 < \dots < j_k$ . 再设

$$B = (\vec{A}^{(j_1)}, \dots, \vec{A}^{(j_k)}).$$

则

$$M_B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} = M_A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \neq 0.$$

故  $B$  中由第  $i_1, \dots, i_k$  行组成的矩阵满秩(第三章第一讲定理 2.14). 于是,  $B$  中  $i_1, \dots, i_k$  行线性无关. 我们得到  $\text{rank}(B) \geq k$ . 故  $\text{rank}(A) \geq k$ . 矛盾. 于是,  $A$  中所有大于  $r$  阶的子式都等于零.

设  $A$  中第  $l_1, \dots, l_r$  列线性无关. 设  $C$  是由这些列组成的子矩阵. 则  $\text{rank}(C) = r$ . 由矩阵秩定理(第二章第二讲定理 3.6), 存在  $C$  中线性无关的  $r$  行. 设为  $k_1, \dots, k_r$  行. 根据第三章第一讲定理 2.14,

$$M_C \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix} \neq 0 \implies M_A \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_r \end{pmatrix} \neq 0.$$

(ii)  $\implies$  (iii) 显然.

(iii)  $\implies$  (i) 假设  $\text{rank}(A) > r$ . 则  $A$  中存在  $r+1$  列线性无关. 设这些列是  $\vec{A}^{(j_1)}, \dots, \vec{A}^{(j_r)}, \vec{A}^{(j_{r+1})}$  且这些列组成的子矩阵是  $P$ . 则  $\text{rank}(P) = r+1$ . 由矩阵秩定理(第二章第二讲定理 3.6)可知,  $P$  中有  $r+1$  行线性无关, 设这些行是  $\vec{P}_{i_1}, \dots, \vec{P}_{i_r}, \vec{P}_{i_{r+1}}$ . 则

$$M_P \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r & i_{r+1} \\ 1 & \cdots & r & r+1 \end{pmatrix} \neq 0 \implies M_A \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r & i_{r+1} \\ j_1 & \cdots & j_r & j_{r+1} \end{pmatrix} \neq 0.$$

矛盾. 故  $\text{rank}(A) \leq r$ . 如果  $\text{rank}(A) < r$ , 则由“(i)  $\implies$  (ii)”可知,  $A$  的所有  $r$  阶子式都等于零. 矛盾. 于是  $\text{rank}(A) = r$ .  $\square$

**例 4.6** 设  $A \in \mathbb{R}^{(n-1) \times n}$  和  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$  是未知数向量. 如果  $\text{rank}(A) = n - 1$ , 则

$$\text{sol}(A\mathbf{x} = \mathbf{0}) = \left\langle \begin{pmatrix} |A_1| \\ -|A_2| \\ \vdots \\ (-1)^{n-1}|A_n| \end{pmatrix} \right\rangle,$$

其中  $A_i$  是  $A$  去掉第  $i$  列得到的  $(n - 1)$  阶方阵.

证明. 设

$$B_i = \begin{pmatrix} \vec{A}_i \\ \vec{A}_1 \\ \vdots \\ \vec{A}_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

则  $\det(B_i) = 0$  (第三章第一讲行列式的性质 (S1)). 对  $B_i$  按第一行展开得

$$a_{i,1}|A_1| - a_{i,2}|A_2| + \cdots + (-1)^{(n-1)} a_{i,n}|A_n| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

故  $(|A_1|, -|A_2|, \dots, (-1)^{n-1}|A_n|)^t$  是  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的一个解. 因为  $\text{rank}(A) = n - 1$ , 所以

$$\dim(\text{sol}(A\mathbf{x} = \mathbf{0})) = 1.$$

于是, 我们只要证明  $(|A_1|, -|A_2|, \dots, (-1)^{n-1}|A_n|)^t$  非零即可. 根据定理 4.5,  $|A_1|, \dots, |A_n|$  至少有一个非零.

**注解 4.7** 定理 4.5 给出了一种通过行列式计算矩阵秩的方法. 该方法虽然效率较低, 但不需要计算非零实数的逆. 这对于把秩推广到交换环上的矩阵由一定帮助.

### 4.3 加边子式法

加边子式法是计算矩阵中最大非零子式的阶的方法. 它避免了穷举所有子式.

**定义 4.8** 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$  不必两两不同,  $j_1, \dots, j_k \in \{1, 2, \dots, n\}$  不必两两不同. 子式

$$M_A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

的加边子式是指

$$M_A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k & p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k & q \end{pmatrix},$$

其中  $p \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $q \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**命题 4.9** 设  $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  非零. 则  $\text{rank}(A) = r$  当且仅当下列两个条件同时成立:

- (i) 存在一个  $r$  阶非零子式;
- (ii) 该子式的所有加边子式都等于零.

证明. 如果  $\text{rank}(A) = r$ , 则条件 (i) 和 (ii) 都成立(定理 4.5).

设

$$N = M_A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \neq 0.$$

对任意  $p \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $q \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 设加边子式

$$M_A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r & p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r & q \end{pmatrix} = 0.$$

则

$$\det \begin{pmatrix} & & & & a_{i_1, q} \\ & & & & \vdots \\ & B & & & a_{i_r, q} \\ & & & & a_{p, q} \\ a_{p, j_1, p}, \dots, a_{p, j_r} & & & & \end{pmatrix} = 0,$$

其中  $B$  是子式  $N$  对应的  $r \times r$  阶子矩阵. 特别地,  $\det(B) = N$ .

把上述行列式按最后一行展开得

$$\alpha_{1, q} a_{p, j_1} + \cdots + \alpha_{r, q} a_{p, j_r} + a_{p, q} N = 0, \quad (2)$$

其中  $\alpha_{1, q}, \dots, \alpha_{r, q} \in \mathbb{R}$  与  $p$  无关. 令  $p=1, 2, \dots, m$ , (2) 蕴含

$$\vec{A}^{(q)} = -\frac{\alpha_{1, q}}{N} \vec{A}^{(j_1)} + \cdots + \left(-\frac{\alpha_{r, q}}{N}\right) \vec{A}^{(j_r)}.$$

故  $A$  中的任意列向量都是  $\vec{A}^{(j_1)}, \dots, \vec{A}^{(j_r)}$  的线性组合. 由此可知  $\text{rank}(A) \leq r$ . 再根据条件 (i) 和定理 4.5, 我们有

$$\text{rank}(A) = r. \quad \square$$



例 4.10 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

计算  $A$  的秩  $r$  和确定一个  $r$  阶的非零子式.

解. 首先,

$$M_A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

它的加边子式

$$M_A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad M_A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \neq 0.$$

我们考虑这个二阶非零子式的加边得到

$$M_A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 0, \quad M_A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 0, \quad M_A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 0.$$

故  $\text{rank}(A) = 2$  且

$$M_A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \neq 0.$$

注意到  $A$  共有  $\binom{5}{3} = 10$  个三阶子式.

## 第四章 群、环和域简介

### 1 二元运算

#### 1.1 定义与基本性质

**定义 1.1** 设  $S$  是集合. 映射  $f : S \times S \longrightarrow S$  称为一个  $S$  上的二元运算. 对于任意  $x, y \in S$ ,  $f(x, y)$  也记为  $xy$ .

#### 例 1.2

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

加法满足交换律、结合律, 有加法单位元  $0$  和加法逆元.

#### 例 1.3

$$\begin{aligned} - : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (x, y) &\mapsto x - y \end{aligned}$$

减法不满足交换律和结合律.

**例 1.4** 设  $S = \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ .

$$\begin{aligned} \dot{+} : S \times S &\longrightarrow S \\ (x, y) &\mapsto \max(x, y) \end{aligned}$$

称之为“热带”加法. 热带加法显然满足交换和结合律. 对于任意  $x \in S$ ,

$$x \dot{+} (-\infty) = x.$$

但  $x$  一般没有逆元.

**定义 1.5** 设  $*$  是  $S$  上的二元运算. 如果对于任意  $x, y, z \in S$ ,

$$x * (y * z) = (x * y) * z,$$

则称  $*$  满足结合律.

**定理 1.6** 设  $*$  集合  $S$  上的二元运算,  $n \geq 3$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ .

设  $k, \ell \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . 则

$$(x_1 \cdots x_k)(x_{k+1} \cdots x_n) = (x_1 \cdots x_\ell)(x_{\ell+1} \cdots x_n).$$

证明. 不妨设  $k > \ell$ . 我们对  $n$  归纳. 设  $n = 3$ . 则  $k = 2$  和  $\ell = 1$ . 由结合律可知, 结论成立.

设  $n > 3$  且结论对于小于  $n$  的值成立. 考虑  $n$  时,

$$\begin{aligned} & (x_1 \cdots x_k) * (x_{k+1} \cdots x_n) \\ &= (x_1 \cdots x_\ell * x_{\ell+1} \cdots x_k) * (x_{k+1} \cdots x_n) \quad (\ell < k) \\ &= ((x_1 \cdots x_\ell) * (x_{\ell+1} \cdots x_k)) * (x_{k+1} \cdots x_n) \quad (\text{归纳假设}) \\ &= (x_1 \cdots x_\ell) * ((x_{\ell+1} \cdots x_k) * (x_{k+1} \cdots x_n)) \quad (\text{结合律}) \\ &= (x_1 \cdots x_\ell) * ((x_{\ell+1} \cdots x_k * x_{k+1} \cdots x_n)). \quad \square \end{aligned}$$

记号. 设  $x \in S$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ . 则

$$x^n = \underbrace{x * \cdots * x}_n.$$

当  $S$  上的二元运算以“+”来记时, 我们定义

$$nx = \underbrace{x + \cdots + x}_n.$$