第一章　空间与形式

1　线性空间

1.1　抽象的线性空间

定义 1.1 设 $(V,+,\mathbf{0})$ 是交换群, $(F,+,0,\cdot,1)$ 域. 设数乘是映射:

$$\begin{array}{rcl} \text{数乘}:\ F\times V & \longrightarrow & V \\ (\alpha,\mathbf{v}) & \mapsto & \alpha\mathbf{v} \end{array}$$

满足以下规律

(i) $\forall\ \alpha,\beta\in F,\mathbf{v}\in V,\ (\alpha\beta)\mathbf{v}=\alpha(\beta\mathbf{v})$;

(ii) $\forall\ \mathbf{v}\in V,\ 1\mathbf{v}=\mathbf{v}$;

(iii) $\forall\ \alpha,\beta\in F,\mathbf{v}\in V,\ (\alpha+\beta)\mathbf{v}=\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{v}$;

(iv) $\forall\ \alpha\in F,\mathbf{u},\mathbf{v}\in V,\ \alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v}$.

我们称 $(V,+,\mathbf{0},\text{数乘},1)$ 是域 F 上的线性空间或向量空间. 域 F 称为 V 的基域.

例 1.2 (坐标空间). 设 F 是域, F^n 是 n 维坐标空间. 具体实例 $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{Z}_p^n$, 其中 p 是素数. 值得注意的是 $\mathbb{Z}_p^n$ 共有 p^n 个元素.

例 1.3 (矩阵空间). 设 F 是域, $F^{m\times n}$ 是 F 上 m 行 n 列的矩阵的集合. 关于矩阵的加法和数乘, $F^{m\times n}$ 是 F 上的线性空间.

例 1.4 (代数空间). 设 R 是环*(不一定交换)*. 再设 $F\subset R$ 是 R 的子域. 则 R 是 F 上的线性空间. 验证如下*:* 首先, $(R,+,0)$ 是交换群. 由 R 中的乘法结合律可知

$$\forall\ \alpha,\beta\in F, r\in R,\ (\alpha\beta)r=\alpha(\beta r).$$

因为 1 是 R 的也是 F 的乘法单位, 所以 $1r=r$. R 的分配律蕴含着空间的分配律. 验证完毕.

具体实例*:* $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间, $F[x_1,\ldots,x_n]$ 是域 F 上的线性空间. *Hamilton* 四元数环是 $\mathbb{C}$ 上的线性空间. 设 K 是 F 的子域. 则 F 上的线性空间也是 K 上的线性空间.

例 1.5 (映射空间) 设 S 是非空集合, V 是域 F 上的线性空间. 令 $\mathrm{Map}(S,V)$ 是从 S 到 V 的所有映射的集合. 对任意 $f,g\in\mathrm{Map}(S,V)$, $\alpha\in F$ 定义*:*

$$\begin{array}{rccc} f+g: & S & \longrightarrow & V \\ & x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{rccc} \alpha f: & S & \longrightarrow & V \\ & x & \mapsto & \alpha f(x). \end{array}$$

令 $\tilde{\mathbf{0}}: S\longrightarrow V$ 是把 S 中的元素都映成 $\mathbf{0}$ 的映射. 则

$$(\mathrm{Map}(S,V),\ +,\ \tilde{\mathbf{0}},\ \text{数乘},\ 1)$$

是线性空间. 实例 $\mathrm{Map}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 是线性空间.

命题 1.6 设 V 是域 F 上的线性空间. 设 $\lambda\in F, \mathbf{v}\in V$. 则

(i) $\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$;

(ii) $\lambda\mathbf{v}=\mathbf{0}$ 当且仅当 $\lambda=0$ 或 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$;

(iii) $(-1)\mathbf{v}=-\mathbf{v}$.

证明. (i) 直接计算得

$$\lambda\mathbf{0}=\lambda(\mathbf{0}+\mathbf{0})=\lambda\mathbf{0}+\lambda\mathbf{0} \implies \lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}.$$

(ii) 设 $\lambda\mathbf{v}=\mathbf{0}$ 且 $\lambda\neq 0$. 则

$$\mathbf{v}=1\mathbf{v}=(\lambda^{-1}\lambda)\mathbf{v}=\lambda^{-1}(\lambda\mathbf{v})=\lambda^{-1}\mathbf{0}\overset{(i)}{=}\mathbf{0}.$$

当 $\lambda=0$ 时, 反之, 由 (i) 只要证明 $0\mathbf{v}=\mathbf{0}$. 直接计算得

$$0\mathbf{v}=(0+0)\mathbf{v}=0\mathbf{v}+0\mathbf{v} \implies 0\mathbf{v}=\mathbf{0}.$$

(iii) 直接计算得

$$\begin{aligned}\mathbf{0}&\overset{(ii)}{=}0\mathbf{v}=(1+(-1))\mathbf{v}\\&=1\mathbf{v}+(-1)\mathbf{v}=\mathbf{v}+(-1)\mathbf{v}\\&\implies(-1)\mathbf{v}=-\mathbf{v}.\quad\square\end{aligned}$$

例 1.7 证明: $(\mathbb{Z},+,0)$ 不可能是任何域 F 上的线性空间.

证明. 设结论不成立. 再设 0_F 和 1_F 分别是 F 中的加法和乘法单位. 先考虑 F 的特征不等于 2 的情形. 此时, $\lambda := 1_F + 1_F \neq 0_F$. 于是 λ^{-1} 存在. 通过直接计算得:

$$\begin{aligned} & 2 = 1 + 1 = (1_F 1 + 1_F 1) = (1_F + 1_F)1 = \lambda 1 \\ & \implies \lambda^{-1} 2 = 1 \\ & \implies \lambda^{-1}(1+1) = 1 \\ & \implies \lambda^{-1} 1 + \lambda^{-1} 1 = 1. \end{aligned}$$

矛盾, 因为两个相同整数之和不可能等于 1.

再设 F 的特征等于 2 的情形. 则

$$2 = 1 + 1 = (1_F 1 + 1_F 1) = (1_F + 1_F)1 = 0_F 1 = 0.$$

矛盾.

1.2 子空间

定义 1.8 设 V 是域 F 上的线性空间, W 是 V 的非空子集. 如果对于任意的 $\alpha, \beta \in F$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$, 我们有 $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in W$, 则称 W 是 V 的子空间.

例 1.9 *(i)* 设 $\phi : F^n \longrightarrow F^m$ 是线性映射. 则 $\ker(\phi)$ 是 F^n 的子空间, $\operatorname{im}(\phi)$ 是 F^m 的子空间.

(ii) 设 $\mathrm{SM}_n(F)$ 是 F 上所有 n 阶对称方阵的集合, $\mathrm{SSM}_n(F)$ 是 F 上所有 n 阶斜对称方阵的集合. 则它们都是 $\mathrm{M}_n(F)$ 上的子空间.

验证如下: 设 $A, B \in \mathrm{SM}_n(F), \alpha, \beta \in F$. 我们有

$$(\alpha A+\beta B)^t = \alpha A^t+\beta B^t = \alpha A+\beta B \implies \alpha A+\beta B \in \mathrm{SM}_n(F).$$

斜对称情形类似.

(iii) 设 $F[x]^{(d)} = \{p \in F[x] \mid \deg(p) < d\}$. 则 $F[x]^{(d)}$ 是 $F[x]$ 的子空间.

(iv) 闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数的集合 $C[a,b]$ 和连续可微函数的集合 $C^1[a,b]$ 是 $\mathrm{Map}([a,b],\mathbb{R})$ 的子空间.

线性空间 V 中的任意个子空间的交仍是子空间, 其证明与上学期第二章第一讲命题 1.19 类似. 设 $V_1, \ldots, V_k$ 是 V 的子空间, 定义

$$V_1+V_2+\cdots+V_k = \{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\cdots+\mathbf{v}_k \mid \mathbf{v}_1 \in V_1, \mathbf{v}_2 \in V_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in V_k\}.$$

则 $V_1 + V_2 + \cdots + V_k$ 是子空间. 称之为 $V_1, \ldots, V_k$ 的和. 验证见上学期第二章第一讲命题 1.20.

1.3 子空间的直和

定义 1.10 设 V 是线性空间, $V_1, \ldots, V_k$ 是 V 的子空间, 且 $W = V_1 + \cdots + V_k$. 如果对于任意 $\mathbf{w} \in W$ 存在唯一的

$\mathbf{v}_1 \in V_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V_k$ 使得

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_k.$$

则称 W 是 $V_1, \ldots, V_k$ 的直和, 并记为

$$W = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k.$$

定理 1.11 *设 V 是线性空间, $V_1, \ldots, V_k$ 是 V 的子空间, 且 $W = V_1 + \cdots + V_k$. 则以下结论等价.*

(i) W 是 $V_1, \ldots, V_k$ 的直和;

(ii) 如果 $\mathbf{0} = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_k$, $\mathbf{v}_1 \in V_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V_k$, 则 $\mathbf{v}_1 = \cdots = \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$.

(iii) 对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$,

$$V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots + V_k) = \{\mathbf{0}\}.$$

证明. (i) $\Longrightarrow$ (ii). 显然.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). 不妨设 $i = 1$. 设 $\mathbf{w} \in V_1 \cap (V_2 + \cdots + V_k)$. 则存在 $\mathbf{v}_2 \in V_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in V_k$ 使得 $\mathbf{w} = \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_k$. 于是

$$\mathbf{0} = -\mathbf{w} + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_k.$$

由 $-\mathbf{w} \in V_1$ 和 (ii) 可知, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). 设 $\mathbf{w} \in W$, 且

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_k = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_k,$$

其中 $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \in V_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k \in V_k$. 则 $\mathbf{0} = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1) + \cdots + (\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_k)$. 于是

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1) = (\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2) + \cdots + (\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_k).$$

由此得出, $\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1 \in V_1 \cap (V_2 + \cdots + V_k)$. 根据 (iii), $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$. 类似地可得 $\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i$, $i = 2, \ldots, k$. $\square$

例 1.12 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基. 则

$$\mathbb{R}^n = \langle \mathbf{v}_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \mathbf{v}_n \rangle.$$

这是因为 $\mathbb{R}^n$ 中的元素都是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 的线性组合而且 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 线性无关.

例 1.13 设 F 是特征不等于 2 的域. 证明:

$$\mathrm{M}_n(F) = \mathrm{SM}_n(F) \oplus \mathrm{SSM}_n(F).$$

证明. 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$. 令

$$B = \frac{1}{2}(A + A^t) \quad \text{和} \quad C = \frac{1}{2}(A - A^t).$$

因为 $2 \neq 0$, 所以 B 和 C 是良定义的. 可直接验证

$$B \in \mathrm{SM}_n(F),\ C \in \mathrm{SSM}_n(F),\ \text{且}\ A = B + C.$$

于是, $\mathrm{M}_n(F) = \mathrm{SM}_n(F) + \mathrm{SSM}_n(F)$. 若 $A \in \mathrm{SM}_n(F) \cap \mathrm{SSM}_n(F)$, 则 $A = A^t = -A^t$. 于是, $2A^t = O$. 因为 2 可逆, 所以 $A = O$, 即这两个子空间交平凡. 由定理 *1.11 (iii)*, $\mathrm{M}_n(F) = \mathrm{SM}_n(F) \oplus \mathrm{SSM}_n(F)$. $\square$

当 F 的特征等于 2 时, $1 = -1$. 于是,

$$\mathrm{SM}_n(F) = \mathrm{SSM}_n(F).$$

故 $\mathrm{SM}_n(F) \cap \mathrm{SSM}_n(F) \neq \{O\}$. 这两个子空间之和不是直和.

例 1.14 设 V 是线性空间, $V_1, \ldots, V_k$ 是 V 的子空间. 如果 $V_1 + \cdots + V_k$ 是直和, 则对任意的 $\ell \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $V_1 + \cdots + V_\ell$ 也是直和.

证明. 设 $\mathbf{v}_1 \in V_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \in V_\ell$ 使得 $\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_\ell = \mathbf{0}$. 则

$$\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_\ell + \underbrace{\mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0}}_{k-\ell} = \mathbf{0}.$$

将定理 *1.11 (ii)* 用于 $V_1, \ldots, V_\ell, \ldots, V_k$ 可知, $\mathbf{v}_1 = \cdots = \mathbf{v}_\ell = \mathbf{0}$. 再将定理 *1.11 (ii)* 用于 $V_1, \ldots, V_\ell$ 得到, $V_1 + \cdots + V_\ell$ 也是直和. $\square$

例 1.15 设

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

则 $\langle \mathbf{v}_1\rangle \cap \langle \mathbf{v}_2\rangle = \{\mathbf{0}\}$, $\langle \mathbf{v}_1\rangle \cap \langle \mathbf{v}_3\rangle = \{\mathbf{0}\}$ 且 $\langle \mathbf{v}_3\rangle \cap \langle \mathbf{v}_1\rangle = \{\mathbf{0}\}$. 但 $\langle \mathbf{v}_3\rangle \cap (\langle \mathbf{v}_1\rangle + \langle \mathbf{v}_2\rangle) = \langle \mathbf{v}_3\rangle$. 于是 $\langle \mathbf{v}_1\rangle + \langle \mathbf{v}_2\rangle + \langle \mathbf{v}_3\rangle$ 不是直和.

例 1.16 设 $P^{(d)} := \{f \in F[x_1, \ldots, x_n] | \deg(f) \le d\} \cup \{0\}$ 和 $H_i = \{h \in F[x_1, \ldots, x_n] | h \text{ 齐 } i \text{ 次}\}$. 根据第一讲 *5.2* 节,

$$P^{(d)} := \bigoplus_{i=0}^{d} H_i.$$

1.4 线性相关性

符号约定. 在本小节和以后的各小节中 V 是域 F 上的线性空间.

设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$ 和 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$. 则 $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k$ 称为 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 在 F 上的一个线性组合. 如果存在不全为零的 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ 使得上述线性组合等于 $\mathbf{0}$, 则称 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 在 F 上线性相关. 否则, 称 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 是在 F 上线性无关.

上学期讲的关于线性组合, 线性相关和无关的结论在抽象线性空间中都成立. 特别地, 我们回忆线性组合引理(上学期第二章第一讲引理 1.12).

引理 1.17 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$; $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_\ell$ 是 V 中两组向量. 如果 $k > \ell$ 且 $\mathbf{v}_i$ 是 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_\ell$ 的线性组合, $i = 1, \ldots, k$. 则 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性相关.

该定理的另一个证明见席南华《基础代数》定理 1.18.

定义 1.18 设 S 是 V 的一个非空子集. 如果 S 中存在一个有限子集是线性相关的, 则称 S 是一个线性相关集. 否则，称 S 是线性无关集.

例 1.19 令 $V = F[x]$. 则 $\{1, x, x^2, \ldots\}$ 是一个线性无关集.

例 1.20 在 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 中, $\sin(x)^2, \cos(x)^2, 1$ 是线性相关的 ($\because\ \sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$).

例 1.21 设 $a = \sqrt{-1}$ 和 $b = \sqrt{-2}$. 则 a, b 在 $\mathbb{R}$ 上线性相关. 这是因为 $\sqrt{2}a - b = 0$. 但它们在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关. 否则, 存在 $q \in \mathbb{Q}$ 使得 $b = qa$. 于是, $q = \sqrt{2}$. 矛盾.

例 1.22 设 $f, g \in C^1(a, b)$. 证明:

(i) 如果 f, g 在 $\mathbb{R}$ 上线性相关, 则对任意 $x \in (a, b)$,

$$W_2 = \det \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix} = 0. \quad W_2 \text{ 称为二阶 } \textit{Wronskian}.$$

(ii) 设 f 在 (a, b) 上恒正. 则 (i) 的逆命题成立.

证明. (i) 设 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 不全为零, 使得对任意 $x \in (a, b)$ 使得 $\lambda f(x) + \mu g(x) = 0$. 则 $\lambda f'(x) + \mu g'(x) = 0$. 于是

$$\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

对任意 $x \in (a,b)$ 成立. 于是, $W_2 = 0$.

(ii) 注意到 f 在 (a,b) 上恒正蕴含 $1/f(x) \in C^1(a,b)$. 因为 W_2 在 (a,b) 上恒为零, 所以在 (a,b) 上

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = 0.$$

故存在 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $g/f = c$, 即 $g - cf = 0$ 在 (a,b) 上成立. 由此得出 f, g 在 $\mathbb{R}$ 上线性相关. □

1.5 子空间的生成元

设 S 是 V 的非空子集. 令 $\langle S \rangle$ 是 S 中的元素的所有在 F 上的线性组合的集合, 即

$$\langle S \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i \,|\, k \in \mathbb{Z}^+, \alpha_i \in F, \mathbf{v}_i \in S \right\}.$$

可验证 $\langle S \rangle$ 是一个子空间(上学期第二章第二讲命题 1.26). 称 $\langle S \rangle$ 为由 S 生成的子空间, S 称为 $\langle S \rangle$ 的一组生成元.

命题 1.23 设 S 是 V 的非空子集. 则 $\langle S \rangle$ 是 V 中包含 S 的所有子空间的交.

证明. 设 U 是 V 的子空间且 $S \subset U$. 则 U 包含 S 中元素的任意线性组合(见上学期第二章第一讲命题 1.16). 于是, $\langle S \rangle \subset U$. 由此可知, $\langle S \rangle$ 在包含 S 的所有子空间的交中. 但 $\langle S \rangle$ 本身是子空间, 它必然包含该交. 故两者相等. □

设 U 是 V 的子空间. 如果存在有限集 $S \subset V$ 使得 $U = \langle S \rangle$, 则称 U 是在 F 上有限生成的子空间.

例 1.24 设 $V = F[x]$. 则 V 不是有限生成的.

证明. 假设 $F[x]$ 可以由 $p_1, \ldots, p_\ell \in F[x]$ 生成. 则 $1, x, \ldots, x^\ell$ 都是 $p_1, \ldots, p_\ell$ 在 F 上的线性组合. 由引理 *1.17* 可知, $1, x, \ldots, x^\ell$ 在 F 上线性相关. 矛盾.

2 线性映射

符号约定. 在本节中 V, W 是域 F 上的两个线性空间. 它们中的零向量分别记为 $\mathbf{0}_V$ 和 $\mathbf{0}_W$.

2.1 定义与例子

定义 2.1 设 $\phi : V \longrightarrow W$. 如果对任意的 $\alpha, \beta \in F$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 都有 $\phi(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\phi(\mathbf{u}) + \beta\phi(\mathbf{v})$, 则称 ϕ 是从 V 到 W 的线性映射.

上学期讲的关于线性映射的性质对抽象的线性映射仍成立. 特别地, 我们回忆一下核空间的性质.

命题 2.2 设 $\phi : V \longrightarrow W$ 是线性映射. 则 ϕ 是单射当且仅当 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_V\}$.

证明. 见上学期第二章第三讲命题 5.8. □

例 2.3 以下线性映射是常用的.

$$\text{零映射}: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ \mathbf{v} & \mapsto & \mathbf{0}_W. \end{array} \qquad \text{恒同映射}: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ \mathbf{v} & \mapsto & \mathbf{v} \end{array}.$$

设 V 是 W 的子空间.

$$\text{嵌入映射}: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ \mathbf{v} & \mapsto & \mathbf{v}. \end{array}.$$

设 ϕ 是从 V 到 W 的线性映射, U 是 V 的子空间. 则限制映射:

$$\phi_U \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & W \\ \mathbf{u} & \mapsto & \phi(\mathbf{u}) \end{array}$$

也是线性映射.

例 2.4 设 $V = F^n$ 和 $W = F^m$. 则 $\phi : V \longrightarrow W$ 是线性映射当且仅当存在 $A \in F^{m\times n}$ 使得

$$\phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad \text{其中 } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots, \\ x_n \end{pmatrix}.$$

例 2.5 设 $V = \mathrm{M}_n(F)$ 和 $W = F$. 令

$$\mathrm{tr} : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(F) & \longrightarrow & F \\ A & \mapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array}$$

是线性映射. 验证如下. 设

$$\alpha, \beta \in F, \quad A = (a_{i,j})_{n\times n}, \quad B = (b_{i,j})_{n\times n},$$

其中 $a_{i,j}, b_{i,j} \in F$. 则 $\alpha A + \beta B = (\alpha a_{i,j} + \beta b_{i,j})$. 于是,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_{i,i} + \beta b_{i,i}) \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \beta \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} \\
&= \alpha \operatorname{tr}(A) + \beta \operatorname{tr}(B).
\end{aligned}$$

于是, tr 是线性的. 但 $\det : \mathrm{M}_n(F) \longrightarrow F$ 不是线性的.

例 2.6 设 $V = F[x]$ 和 $h \in F[x] \setminus \{0\}$. 令

$$\begin{array}{cccc}
\phi_h & F[x] & \longrightarrow & F[x] \\
 & f & \mapsto & \operatorname{rem}(f, h, x).
\end{array}$$

是线性映射. 验证如下. 设 $\alpha, \beta \in F$, $f, g \in F[x]$. 由多项式除法可知, 存在 $p, q \in F[x]$ 使得

$$f = ph + \phi_h(f) \quad 和 \quad g = qh + \phi_h(g).$$

于是 $\alpha f + \beta g = (\alpha p + \beta q)h + \alpha\phi_h(f) + \beta\phi_h(g)$. 因为 $\deg(\phi_h(f)) < \deg(h)$ 和 $\deg(\phi_h(g)) < \deg(h)$, 所以 $\deg(\alpha\phi_h(f) + \beta\phi_h(g)) < \deg(h)$. 由余式的唯一性可知

$$\phi_h(\alpha f + \beta g) = \alpha\phi_h(f) + \beta\phi_h(g).$$

根据多项式的除法, 我们有

$$\ker(\phi_h) = \{f \in F[x] \mid h|f\} \quad 和 \quad \mathrm{im}(\phi_h) = F[x]^{(\deg(h))}.$$

例 2.7 设 $F = \mathbb{R}$, $V = C^1[a,b]$ 和 $W = C[a,b]$. 则求导 d/dx 是从 V 到 W 的线性映射, 而变上限积分

$$\begin{array}{rccc} \int_a^x: & W & \longrightarrow & V \\ & f(t) & \mapsto & \int_a^x f(t)\,dt \end{array}$$

是线性映射. 直接计算得

$$\ker\left(\frac{d}{dx}\right) = \mathbb{R}, \ \mathrm{im}\left(\frac{d}{dx}\right) = C[a,b]$$

和

$$\ker\left(\int_a^x\right) = \{0\}, \ \mathrm{im}\left(\int_a^x\right) = \{f \in C^1[a,b] | f(a) = 0\}.$$

2.2 线性映射的运算

令 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 是从 V 到 W 的所有线性映射的集合. 它是 $\mathrm{Map}(V,W)$ 的子集. 可直接验证, 对任意的 $\alpha, \beta \in F$, $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}(V,W)$, 我们有 $\alpha\phi + \beta\psi \in \mathrm{Hom}(V,W)$ (见上学期第二章第四讲命题 6.11). 于是, $\mathrm{Hom}(V,W)$ 是 $\mathrm{Map}(V,W)$ 的子空间, 故它也是 F 上的线性空间. 再设 U 是另一个 F 上的线性空间. 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(U,V)$ 和 $\psi \in \mathrm{Hom}(V,W)$. 则 $\psi \circ \phi \in \mathrm{Hom}(U,W)$. 具体验证见上学期第二章第四讲命题 6.15.

例 2.8 考虑例 *2.7* 中的两个映射. 我们有

$$\int_a^x \left(\frac{d}{dt}f(t)\right) dt = f(x) - f(a) \quad 和 \quad \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\, dt\right) = f(x).$$

命题 2.9 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 是双射. 则 $\phi^{-1} \in \mathrm{Hom}(W, V)$.

证明. 设 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$, $\mathbf{v}_1 = \phi^{-1}(\mathbf{w}_1)$ 和 $\mathbf{v}_2 = \phi^{-1}(\mathbf{w}_2)$. 对任意的 $\alpha_1, \alpha_2 \in F$,

$$\phi(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) = \alpha_1\phi(\mathbf{v}_1) + \alpha_2\phi(\mathbf{v}_2) = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2.$$

于是

$$\phi^{-1}(\alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2) = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \alpha_1\phi^{-1}(\mathbf{w}_1) + \alpha_2\phi^{-1}(\mathbf{w}_2). \quad \square$$

定义 2.10 如果存在双射 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, 则称 V 和 W 线性同构.

线性同构是等价关系, 其验证过程与验证群同构是等价关系类似(见上学期第四章第一讲第 15 页).

例 2.11 线性空间 $\mathrm{Hom}(F^n, F^m)$ 与 $F^{m\times n}$ 线性同构. 设

$$\begin{array}{rcl} \Phi:\ \mathrm{Hom}(F^n, F^m) & \longrightarrow & F^{n\times m} \\ \phi & \mapsto & A_\phi \quad (\phi \text{ 在标准基下的矩阵}) \end{array}$$

则 Φ 是双射. 具体验证见上学期第二章第四讲推论 *6.14*. 于是, Φ 是线性同构.