第一章　空间与形式

3　商空间

在本节中 V 是域 F 上的线性空间.

3.1　商空间

定义 3.1 设 $\mathbf{x} \in V$ 且 $U \subset V$ 是子空间. 我们称 $\mathbf{x}+U$ 是以 U 为方向的线性流形.

引理 3.2 设两个 V 中的线性流形相同, 则它们方向相同.

证明. 见上学期第二章第二讲引理 1.23. □

设 U 是 V 的子空间. 我们在 V 上定义如下等价关系.

定义 3.3 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 如果 $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in U$, 则称 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 关于 U 等价. 记为 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$.

我们验证 $\sim_U$ 是等价关系. 首先, $\mathbf{x}-\mathbf{x} = \mathbf{0} \in U$. 于是对任意的 $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{x}$. 自反性成立. 设 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$. 则 $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in U$. 于是 $\mathbf{y}-\mathbf{x} \in U$. 从而 $\mathbf{y} \sim_U \mathbf{x}$. 对称性成立. 设 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \sim_U \mathbf{z}$. 则 $\mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{y}-\mathbf{z} \in U$. 于是

$$\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{y}-\mathbf{z} = \mathbf{x}-\mathbf{z} \in U.$$

于是 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{z}$. 传递性成立.

引理 3.4 设 $\mathbf{x} \in V$ 且 $[\mathbf{x}]$ 是 $\mathbf{x}$ 所在的等价类. 则 $[\mathbf{x}] = \mathbf{x} + U$.

证明. 设 $\mathbf{u} \in U$. 则存在 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{x} + \mathbf{u}$. 于是 $\mathbf{x} + \mathbf{u} \in [\mathbf{x}]$. 由此可知, $\mathbf{x} + U \subset [\mathbf{x}]$. 再设 $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}]$. 则 $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in U$, 即存在 $\mathbf{u} \in U$ 使得 $\mathbf{y} - \mathbf{x} = \mathbf{u}$, 即 $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{u}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{x} + U$. 由此可知, $[\mathbf{x}] \subset \mathbf{x} + U$. $\square$

由上述引理可知

$$V/\sim_U = \{\mathbf{v} + U \mid \mathbf{v} \in V\}.$$

为了化简符号, 我们用 V/U 记 $V/\sim_U$. 引理 3.2 说明商集 V/U 是所有方向为 U 的线性流形的集合. 与剩余环类似, V 上的加法和数乘可诱导出 V/U 中的线性运算.

设 $\mathbf{x} + U, \mathbf{y} + U \in V/U$ 和 $\alpha \in F$. 定义:

$$(\mathbf{x}+U)+(\mathbf{y}+U) = (\mathbf{x}+\mathbf{y})+U \quad \text{和} \quad \alpha(\mathbf{x}+U) = (\alpha\mathbf{x})+U.$$

下面我们来验证这两个运算的良定义. 设 $\mathbf{x} + U = \mathbf{x}' + U$ 和 $\mathbf{y} + U = \mathbf{y}' + U$. 则 $\mathbf{x} - \mathbf{x}', \mathbf{y} - \mathbf{y}' \in U$. 于是

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + (\mathbf{y} - \mathbf{y}') = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x}' + \mathbf{y}') \in U& \\
\implies (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \sim_U (\mathbf{x}' + \mathbf{y}')& \\
\implies (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + U = (\mathbf{x}' + \mathbf{y}') + U.&
\end{aligned}$$

类似地, 对 $\alpha \in F$,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} - \mathbf{x}' \in U &\Longrightarrow \alpha\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x}' \in U \\ &\Longrightarrow \alpha\mathbf{x} \sim_U \alpha\mathbf{x}' \\ &\Longrightarrow (\alpha\mathbf{x}) + U = (\alpha\mathbf{x}') + U. \end{aligned}$$

由 V 中的运算规律可知, V/U 是域 F 上的线性空间, 其中的"零向量" 是 $\mathbf{0} + U = U$. 称 V/U 是 V 关于 U 的商空间.

3.2 自然的线性映射

设 $\pi_U : V \longrightarrow V/U$ 是自然投射, 即对任意的 $\mathbf{x} \in V$, $\pi_U(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + U$ (见上学期第一章第三讲定义 5.14). 下面我们来验证 π_U 是线性的. 对任意 $\alpha, \beta \in F$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$\begin{aligned} \pi_U(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) &= (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) + U && (\pi_U \text{ 的定义}) \\ &= ((\alpha\mathbf{x}) + U) + ((\beta\mathbf{y}) + U) && (V/U \text{ 中加法的定义}) \\ &= \alpha(\mathbf{x} + U) + \beta(\mathbf{y} + U) && (V/U \text{ 中数乘的定义}) \\ &= \alpha\pi_U(\mathbf{x}) + \beta\pi_U(\mathbf{y}) && (\pi_U \text{ 的定义}). \end{aligned}$$

验证完毕.

设 $\phi : V \longrightarrow W$ 是从 V 到 F 上的线性空间 W 的线性映射. 则对任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{y}) \iff \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{x}-\mathbf{y} \in \ker(\phi) \iff \mathbf{x} \sim_{\ker(\phi)} \mathbf{y}.$$

由上学期第一章第三讲定理 5.17 (映射分解定理)可知存在唯一的单射 $\bar{\phi}: V/\ker(\phi) \longrightarrow W$ 使得 $\phi = \bar{\phi} \circ \pi_{\ker(\phi)}$. 即下述图表交换.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_{\ker(\phi)}"] & W \\
V/\ker(\phi) \arrow[ur, "\bar{\phi}"] &
\end{tikzcd}$$

交换. 特别有 $\mathrm{im}(\phi) = \mathrm{im}(\bar{\phi})$. 设 $\mathbf{x} + \ker(\phi) \in V/\ker(\phi)$. 则

$$\phi(\mathbf{x}) = \bar{\phi} \circ \pi_{\ker(\phi)}(\mathbf{x}) = \bar{\phi}(\mathbf{x} + \ker(\phi)).$$

于是

$$\begin{array}{rccc} \bar{\phi}: & V/\ker(\phi) & \longrightarrow & W \\ & \mathbf{x} + \ker(\phi) & \mapsto & \phi(\mathbf{x}). \end{array}$$

定理 3.5 *(线性映射基本定理 I)* *设 $\phi: V \longrightarrow W$ 是从 V 到 F 上的线性空间 W 的映射. 则存在唯一的线性单射 $\bar{\phi}$ 使得 $\phi = \bar{\phi} \circ \pi_{\ker(\phi)}$. 特别地, $V/\ker(\phi)$ 与 $\mathrm{im}(\phi)$ 线性同构.*

证明. 根据上文, 我们只需验证 $\bar{\phi}$ 是线性的.

令 $U = \ker(\phi)$. 设 $\alpha, \beta \in F$, $\mathbf{x} + U, \mathbf{y} + U \in V/U$. 则

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}(\alpha(\mathbf{x}+U) + \beta(\mathbf{y}+U)) &= \bar{\phi}((\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) + U) && (V/U \text{ 中的运算}) \\
&= \phi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) && (\bar{\phi} \text{ 的定义}) \\
&= \alpha\phi(\mathbf{x}) + \beta\phi(\mathbf{y}) && (\phi \text{ 线性}) \\
&= \alpha\bar{\phi}(\mathbf{x}+U) + \beta\bar{\phi}(\mathbf{y}+U) && (\bar{\phi} \text{ 的定义}).
\end{aligned}$$

验证完毕.

因为 $\bar{\phi}$ 是单射且 $\mathrm{im}(\phi) = \mathrm{im}(\bar{\phi})$. 我们有 $\bar{\phi}$ 是从 V/U 到 $\mathrm{im}(\phi)$ 的线性同构. $\square$

推论 3.6 *利用线性映射基本定理 I 的假设和符号, 再设 ϕ 是满射. 则 $V/\ker(\phi)$ 和 W 线性同构.*

证明. 由上述定理直接可得. $\square$

推论 3.7 *设 V_1, V_2 是 V 的子空间. 则*

$$V_2/(V_1 \cap V_2) \quad \text{和} \quad (V_1 + V_2)/V_1$$

线性同构.

证明. 设

$$\phi : V_2 \longrightarrow V_1 + V_2$$

是嵌入,

$$\pi : V_1 + V_2 \longrightarrow (V_1 + V_2)/V_1$$

是自然投射. 则 $\psi = \pi \circ \phi$ 是从 V_2 到 $(V_1+V_2)/V_1$ 的线性映射. 任意 $(V_1+V_2)/V_1$ 中的元素都可以表示为 $(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)+V_1$, 其中 $\mathbf{v}_1 \in V_1, \mathbf{v}_2 \in V_2$. 注意到 $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + V_1 = \mathbf{v}_2 + V_1$. 于是, 任何 $(V_1 + V_2)/V_1$ 中的元素都可以表示为 $\mathbf{v}_2 + V_1$. 故

$$\psi(\mathbf{v}_2) = \pi \circ \phi(\mathbf{v}_2) = \pi(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 + V_1.$$

于是 ψ 是满射. 若 $\mathbf{v}_2 \in V_1 \cap V_2$, 则 $\mathbf{v}_2 + V_1 = V_1$. 由此可知, $V_1 \cap V_2 \subset \ker(\psi)$. 反之, 设 $\mathbf{v}_2 \in \ker(\psi)$. 则

$$\psi(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 + V_1 = V_1.$$

于是, $\mathbf{v}_2 \in V_1 \cap V_2$. 从而 $\ker(\psi) = V_1 \cap V_2$. 由推论 3.6, 这两个商空间线性同构. $\square$

上述证明可以用下列交换图简洁地表示.

$$\begin{tikzcd} V_2 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_{\ker(\psi)}"'] \arrow[dr, "\psi"] & V_1 + V_2 \arrow[d, "\pi"] \\ V_2/\ker(\psi) \arrow[r, "\bar{\psi}"'] & (V_1 + V_2)/V_1 \end{tikzcd} \quad \text{且} \quad \ker(\psi) = V_1 \cap V_2.$$

推论 3.8 设 V_1, V_2 是 V 的子空间, 且 $V_1 + V_2$ 是直和. 则 $(V_1 + V_2)/V_1$ 和 V_2 线性同构.

证明. 由推论 3.7, $(V_1 + V_2)/V_1$ 与 $V_2/\{\mathbf{0}\}$ 线性同构. 设 $\phi : V_2 \longrightarrow V_2$ 是恒同映射. 由推论 3.6, V_2 与 $V_2/\{\mathbf{0}\}$ 线性同构. 由此可知, $(V_1 + V_2)/V_1$ 与 V_2 线性同构. $\square$

例 3.9 设

$$V_d = \{f \in F[x] \mid \deg(f) < d\} \text{ 和 } W_d = \{g \in F[x] \mid \deg(g) \geq d\} \cup \{0\}.$$

则 $F[x] = V_d \oplus W_d$, $F[x]/V_d \cong W_d$ 和 $F[x]/W_d \cong V_d$, 其中 $\cong$ 代表线性同构.

4 基底与维数

在本节中 V 是域 F 上的线性空间.

4.1 极大线性无关组

定义 4.1 设 $S \subset V$ 是非空集. 设 $M \subset S$ 是线性无关集. 如果对任意 $\mathbf{v} \in S$, $\mathbf{v} \in \langle M \rangle$, 即 $S \subset \langle M \rangle$, 则称 M 是 S 中的一个极大线性无关集.

例 4.2 设 $S = \{x, x^3, 2x^3 + x\} \subset \mathbb{Q}[x]$. 求 S 中所有的极大线性无关组.

解. 注意到次数两两不同的多项式组成的集合是线性无关的. 子集 $S_1 = \{x, x^3\}$ 是线性无关组. 这是因为 $2x^3 + x = 2x^3 + x$. 子集 $S_2 = \{x, 2x^3 + x\}$ 是极大线性无关组. 这是因为 $x^3 = (1/2)(2x^3 + x) - (1/2)x$. 而 $S_3 = \{2x^3 + x, x^3\}$ 也是极大线性无关组. 这是因为 $\alpha(2x^3 + x) + \beta x^3 = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ 蕴含着 $\alpha = 0$, 从而 $\beta = 0$. 故 S_3 是线性无关集. 再注意到 $x = (2x^3 + x) - 2x^3$ 即可.

线性空间中的任何含有非零向量的子集都有极大线性无关集. 但证明这一结论需要 Zorn 引理(超限归纳法). 今后我们主要关心有限生成的线性空间.

命题 4.3 设 $S \subset V$ 是非空集. 设 $T \subset S$ 是线性无关集. 再设 $V = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$. 则下述断言成立.

(i) (可扩充) S 中有极大线性无关集 M 包含 T, 且 $\mathrm{card}(M) \le k$.

(ii) (等势) 设 M 和 N 是 S 中两个极大线性无关集. 则 $\mathrm{card}(M) = \mathrm{card}(N)$.

(iii) (表示唯一) 设 $M = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\} \subset S$. 则 M 是 S 中的极大线性无关集当且仅当对任意的 $\mathbf{v} \in S$, 存在唯一的 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in F$ 使得 $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \alpha_s \mathbf{w}_s$.

证明. (i) 和 (ii) 见上学期第二章第二讲命题 2.3. (iii) 是上学期第二章第一讲命题 1.11 (iv) 的直接推论. □

4.2 基底和维数

定义 4.4 线性空间 V 的极大线性无关组称为 V 一组基. 如果 V 的极大线性无关组 B 有限, 则 V 的维数定义为 $\mathrm{card}(B)$. 否则 V 的维数定义为 ∞. 如果 $V = \{\mathbf{0}\}$, 其维数定义为 0. 线性空间 V 的维数记为 $\dim_F(V)$ 或 $\dim(V)$.

根据命题 4.3, 线性空间的维数是良定义的.

定义 4.5 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 V 的一组基. 对任意的 $\mathbf{x} \in V$,

存在唯一的 $x_1,\ldots,x_n\in F$ 使得

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{v}_1+\cdots+x_n\mathbf{v}_n=(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

称 $(x_1,\ldots,x_n)^t$ 是 $\mathbf{x}$ 在基底 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 的坐标.

坐标的存在唯一性由命题 4.3 (iii) 可得.

例 4.6 *(坐标空间)* F^n 的标准基

$$\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\\0\end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \mathbf{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}.$$

于是 $\dim(F^n)=n$.

例 4.7 *(矩阵空间)* 设 $E_{i,j}\in F^{m\times n}$, 其中在 i 行 j 列处的元素是 1, 而其它处的元素是 0, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2\ldots,n$. 则 $\{E_{i,j}\,|\,i\in\{1,2,\ldots,m\},\,j\in\{1,2\ldots,n\}\}$ 是 $F^{m\times n}$ 的一组基. 于是 $\dim F^{m\times n}=mn$. 下面我们证明 $\mathrm{SM}_n(F)$ 的一组基是

$$S=\{E_{i,i}\,|\,i=1,2,\ldots,n\}\cup\{E_{i,j}+E_{j,i}\,|\,i,j\in\{1,2,\ldots,n\},\,i\neq j\}.$$

证明. 可直接验证 $S \subset \mathrm{SM}_n(F)$. 设 $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{SM}_n(F)$. 则 $a_{i,j} = a_{j,i}$. 于是

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} E_{i,i} + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}).$$

如果

$$\sum_{i=1}^{n} b_{i,i} E_{i,i} + \sum_{1 \le i < j \le n} b_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}) = O,$$

其中 $b_{i,i}, b_{i,j} \in F$. 可直接验证所有的 $b_{i,i} = 0$, $b_{i,j} = 0$. 于是 S 是 $\mathrm{SM}_n(F)$ 的一组基. □

从而 $\dim(\mathrm{SM}_n(F)) = 1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$.

例 4.8 *(代数空间)* $F[x]$ 的一组基是 $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$. 于是 $\dim F[x] = \infty$. 子空间 $F[x]^{(d)}$ 的一组基是$\{1, x, \ldots, x^{d-1}\}$, 其维数是 d. 此外, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. 这是因为

$$\mathbb{C} = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

但 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$ *(证明需要其它数学知识)*.

例 4.9 因为当 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ 两两不同时, $e^{\alpha_1 x}, \ldots, e^{\alpha_k x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关, 所以由 k 的任意性可知, $\dim \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \infty$.

定理 4.10 *(基扩充定理)* 设 V 是有限维线性空间. 如果 $S \subset V$ 是线性无关集, 则存在 V 的基底 T 使得 $S \subset T$.

证明. 因为 V 是有限维的, 所以它是有限生成的. 由基底的定义和命题 4.3 直接推出定理. $\square$

定理 4.11 *(线性映射基本定理 II)* 设 V 的一组基是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, W 是 F 上的线性空间且 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \in W$. 则存在唯一的线性映射 $\phi: V \longrightarrow W$ 使得

$$\phi(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, \ldots, \phi(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n.$$

证明. 见上学期第二章第三讲定理 5.9 的证明. $\square$

定理 4.12 设 V, W 是 F 上的有限维线性空间. 则 V 和 W 线性同构当且仅当 $\dim(V) = \dim(W)$. 特别地, 当 $\dim_F(V) = n$ 时, V 和 F^n 线性同构.

证明. 设 $\dim(V) = \dim(W) = n$. 令 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 和 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ 分别是 V 和 W 的基底. 由定理 4.11 存在线性映射 $\phi: V \longrightarrow W$ 和 $\psi: W \longrightarrow V$ 使得 $\phi(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ 和 $\psi(\mathbf{w}_i) = \mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 于是, $\psi \circ \phi(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 由定理 4.11 的唯一性可知 $\psi \circ \phi$ 是 V 上的恒同映射. 同理, $\phi \circ \psi$ 是 W 上的恒同映射. 于是, ϕ 是线性同构.

反之, 设 V 的一组基是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, $\phi: V \longrightarrow W$ 是线性同构. 若 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ 使得

$$\alpha_1\phi(\mathbf{v}_1) + \cdots + \alpha_n\phi(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}_W \implies \phi(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}_W.$$

因为 ϕ 是单射, 所以 $\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}_V$. 于是,

$$\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0 \implies \phi(\mathbf{v}_1),\ldots\phi(\mathbf{v}_n) \text{ 线性无关.}$$

由定理 4.10 可知, $\dim(W)\geq\dim(V)$. 同理 $\dim(V)\geq\dim(W)$. 于是, $\dim(V)=\dim(W)$. □

4.3 若干维数公式

在本小节中, V 是有限维线性空间.

引理 4.13 设 U 是 V 的子空间. 则

$$\dim(V/U)=\dim(V)-\dim(U). \tag{1}$$

证明. 设 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 是 U 的一组基. 由定理 4.10 可知，存在 $\mathbf{v}_{k+1},\ldots,\mathbf{v}_n\in V$ 使得 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_{k+1},\ldots,\mathbf{v}_n$ 是 V 的一组基. 下面我们来证明 $\mathbf{v}_{k+1}+U,\ldots,\mathbf{v}_n+U$ 是 V/U 的一组基. 首先, 设 $\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n\in F$ 使得

$$\alpha_{k+1}(\mathbf{v}_{k+1}+U)+\cdots+\alpha_n(\mathbf{v}_n+U)=U.$$

则 $(\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}+\cdots\alpha_n\mathbf{v}_n)+U=U$. 即 $(\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}+\cdots\alpha_n\mathbf{v}_n)\in U$. 换言之, 存在 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in F$ 使得

$$\begin{aligned}
&\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}+\cdots+\alpha_n\mathbf{v}_n\\
&=\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{v}_k\\
&\implies \alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{v}_k+(-\alpha_{k+1})\mathbf{v}_{k+1}+\cdots+(-\alpha_n)\mathbf{v}_n=\mathbf{0}.
\end{aligned}$$

因为 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ 线性无关, 所以

$$\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0.$$

于是, $\mathbf{v}_{k+1} + U, \ldots, \mathbf{v}_n + U$ 线性无关. 再设 $\mathbf{v} + U \in V/U$, 其中 $\mathbf{v} \in V$. 则存在 $\beta_1, \ldots, \beta_n \in V$ 使得

$$\mathbf{v} = \underbrace{\beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_k\mathbf{v}_k}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\beta_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + \beta_n\mathbf{v}_n}_{\mathbf{y}}.$$

于是

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} + U &= \mathbf{x} + \mathbf{y} + U \\
&= (\mathbf{x} + U) + (\mathbf{y} + U) && \text{(商空间中的运算)} \\
&= U + (\mathbf{y} + U) && (\mathbf{x} \in U) \\
&= \mathbf{y} + U && (U \text{ 是 } V/U \text{ 中的零}) \\
&= \beta_{k+1}(\mathbf{v}_{k+1} + U) + \cdots + \beta_n(\mathbf{v}_n + U). && \text{(商空间中的运算)}
\end{aligned}$$

由此可知, $\mathbf{v}_{k+1} + U, \ldots, \mathbf{v}_n + U$ 是 V/U 的一组基. 从而 $\dim(V/U) = n - k$. □

命题 4.14 *(i) 设 U 是 V 的子空间, 则 $U \neq V$ 当且仅当 $\dim(U) < \dim(V)$.*

(ii) 设 V_1, V_2 是 V 的子空间. 则

$$\dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2).$$

(iii) 设 $\phi: V \longrightarrow W$ 是线性映射. 则

$$\dim(\ker(\phi)) + \dim(\operatorname{im}(\phi)) = \dim(V).$$

证明. (i) (方法1) 见上学期第二章第二讲命题 2.13.

(方法2)

$$\dim(U) < \dim(V) \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \dim(V/U) > 0 \Longleftrightarrow V/U \neq \{U\} \Longleftrightarrow U \subsetneq V.$$

(ii) (方法1) 见上学期第二章第二讲命题 2.14.

(方法2) 由推论 3.7 和 定理 4.12,

$$\begin{aligned} &\dim((V_1+V_2)/V_1) = \dim(V_2/(V_1 \cap V_2)) \\ \overset{(1)}{\Longrightarrow}\ &\dim(V_1+V_2) - \dim(V_1) = \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2). \end{aligned}$$

(iii) (方法1) 见上学期第二章第三讲定理 5.14.

(方法2) 由线性映射基本定理I和定理 4.12,

$$\dim(V/\ker(\phi)) = \dim(\operatorname{im}(\phi)) \overset{(1)}{\Longrightarrow} \dim(V) - \dim(\ker(\phi)) = \dim(\operatorname{im}(\phi)).$$

命题 4.15 设 $V_1, \ldots, V_k$ 是 V 的子空间. 则

$$\dim(V_1 + \cdots + V_k) \leq \dim(V_1) + \cdots + \dim(V_k).$$

等号成立当且仅当 $V_1 + \cdots + V_k$ 是直和.

证明. 我们对 k 归纳证明不等式. 当 $k=1$ 时不等式显然成立. 设 $k>1$ 且不等式对 $k-1$ 成立. 则

$$\begin{aligned}
&\dim(V_1+V_2+\cdots+V_k)\\
&=\dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k)\\
&-\dim(V_1\cap(V_2+\cdots+V_k)) \quad (\text{命题 } 4.14 \text{ (ii)})\\
&\leq \dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k)\\
&\leq \dim(V_1)+\dim(V_2)+\cdots+\dim(V_k). \quad (\text{归纳假设})
\end{aligned}$$

设 $V_1+\cdots+V_k$ 是直和. 对 k 归纳. 当 $k=1$ 时显然. 设 $k>1$ 且 $k-1$ 时结论成立.

$$\begin{aligned}
&\dim(V_1+V_2+\cdots+V_k)\\
&=\dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k)\\
&\quad-\dim(V_1\cap(V_2+\cdots+V_k)) && (\text{命题 } 4.14 \text{ (ii)})\\
&=\dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k) && (\text{定理 } 1.12 \text{ (iii)})\\
&=\dim(V_1)+\dim(V_2)+\cdots+\dim(V_k). && (\text{归纳假设})
\end{aligned}$$

反之, 设 $\dim(V_1+\cdots+V_k)=\dim(V_1)+\cdots+\dim(V_k)$. 我们要证明 $V_1+\cdots+V_k$ 是直和. 假设不是直和. 由定理 1.11 (iii), 存在 $i\in\{1,\ldots,k\}$ 使得

$$V_i\cap(V_1+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}+\cdots+V_n)\neq\{\mathbf{0}\}.$$

不妨设 $i = 1$. 则

$$\begin{aligned}
&\dim(V_1 + V_2 + \cdots + V_k) \\
&= \dim(V_1) + \dim(V_2 + \cdots + V_k) \\
&- \dim(V_1 \cap (V_2 + \cdots + V_k)) \quad (\because \text{命题 } 4.14 \text{ (ii)}) \\
&< \dim(V_1) + \dim(V_2 + \cdots + V_k) \quad (\because V_1 \cap (V_2 + \cdots + V_k) \neq \{\mathbf{0}\}) \\
&\leq \dim(V_1) + \dim(V_2) + \cdots + \dim(V_k). \quad (\because \text{刚证的不等式})
\end{aligned}$$

矛盾. □

4.4 利用线性映射的核证明矩阵秩的不等式

核方法基本步骤如下:

1. 把矩阵解释为坐标空间的线性映射;
2. 利用对偶定理 $\dim(\ker(\phi_A)) + \mathrm{rank}(A) = n$ 把秩转换为核的维数;
3. 利用核空间的包含关系和线性映射基本定理 (I), 构造线性单射;
4. 利用线性单射保持原像空间的维数证明不等式.

例 4.16 设 $A \in F^{m\times s}$ 和 $B \in F^{s\times n}$. 证明:

$$\mathrm{rank}(AB) \geq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) - s.$$

证明. 设

$$\begin{array}{rccc} \phi_A: & F^s & \longrightarrow & F^m \\ & \mathbf{x} & \mapsto & A\mathbf{x} \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{rccc} \phi_B: & F^n & \longrightarrow & F^s \\ & \mathbf{x} & \mapsto & B\mathbf{x}. \end{array}$$

则

$$\begin{array}{rccc} \phi_A \circ \phi_B: & F^n & \longrightarrow & F^m \\ & \mathbf{x} & \mapsto & AB\mathbf{x}. \end{array}$$

故 $\phi_A \circ \phi_B = \phi_{AB}$.

设 $K_A = \ker(\phi_A)$, $K_B = \ker(\phi_B)$ 和 $K_{AB} = \ker(\phi_{AB})$. 令 $d_A = \dim(K_A)$, $d_B = \dim(K_B)$ 和 $d_{AB} = \dim(K_{AB})$. 则

$$d_A + \operatorname{rank}(A) = s, \quad d_B + \operatorname{rank}(B) = n, \quad d_{AB} + \operatorname{rank}(AB) = n.$$

故要证明的不等式等价于

$$n - d_{AB} \geq s - d_A + n - d_B - s \iff d_A + d_B \geq d_{AB}.$$

注意到 $K_B \subset K_{AB} \subset F^n$. 定义:

$$\begin{array}{rccc} \rho: & K_{AB} & \longrightarrow & K_A \\ & \mathbf{x} & \mapsto & B\mathbf{x}. \end{array}$$

注意到 $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}_m$ 蕴含 $B\mathbf{x} \in K_A$. 故上述线性映射是良定义的. 显然 $K_B = \ker(\rho)$. 根据线性映射基本定理 I, 存在线性单射 $\bar{\rho}: K_{AB}/K_B \longrightarrow K_A$.

因为 $\bar{\rho}$ 是单射, 所以

$$\dim(K_{AB}/K_B) = \dim(\operatorname{im}(\bar{\rho})) \leq d_A.$$

根据引理 *4.13*, $d_{AB}-d_B\le d_A \Longrightarrow d_{AB}\le d_A+d_B$. $\square$

例 4.17 设 $A,B\in \mathrm{M}_n(F)$ 且 $AB=BA$. 证明:

$$\operatorname{rank}(A+B)+\operatorname{rank}(AB)\le \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B).$$

证明. 设

$$\begin{array}{rccc}\phi_A: & F^n & \longrightarrow & F^n\\ & \mathbf{x} & \mapsto & A\mathbf{x}\end{array} \quad 和 \quad \begin{array}{rccc}\phi_B: & F^n & \longrightarrow & F^n\\ & \mathbf{x} & \mapsto & B\mathbf{x}.\end{array}$$

则

$$\begin{array}{rccc}\phi_A\circ\phi_B: & F^n & \longrightarrow & F^m\\ & \mathbf{x} & \mapsto & AB\mathbf{x}.\end{array} \quad 和 \quad \begin{array}{rccc}\phi_A+\phi_B: & F^n & \longrightarrow & F^m\\ & \mathbf{x} & \mapsto & (A+B)\mathbf{x}.\end{array}$$

故 $\phi_A\circ\phi_B=\phi_{AB}$ 且 $\phi_A+\phi_B=\phi_{A+B}$.

设 $K_A=\ker(\phi_A)$, $K_B=\ker(\phi_B)$, $K_{AB}=\ker(\phi_{AB})$ 和 $K_{A+B}=\ker(\phi_{A+B})$. 令 $d_A=\dim(K_A)$, $d_B=\dim(K_B)$, $d_{AB}=\dim(K_{AB})$ 和 $d_{A+B}=\dim(K_{A+B})$. 则

$$d_A+\operatorname{rank}(A)=d_B+\operatorname{rank}(B)=d_{AB}+\operatorname{rank}(AB)=d_{A+B}+\operatorname{rank}(A+B)=n.$$

故要证明的不等式等价于

$$n-d_{A+B}+n-d_{AB}\le n-d_A+n-d_B \iff d_A+d_B\le d_{A+B}+d_{AB}.$$

由上例的推理可知: $K_B\subset K_{AB}$. 因为 $AB=BA$, 所以 $K_{AB}=K_{BA}$. 故 $K_A\subset K_{AB}$. 于是

$$K_A+K_B\subset K_{AB} \Longrightarrow \dim(K_A+K_B)\le d_{AB}.$$

再根据维数公式

$$d_A+d_B-\dim(K_A\cap K_B) \leq d_{AB} \implies d_A+d_B \leq d_{AB}+\dim(K_A\cap K_B).$$

于是, 只要证明 $\dim(K_A \cap K_B) \leq d_{A+B}$. 可直接验证

$$K_A \cap K_B \subset K_{A+B}.$$

故最后一个不等式显然成立. $\square$