第一章　空间与形式

5　坐标变换和线性映射的矩阵表示

在本节中 V 是域 F 上的 n 维线性空间.

5.1　坐标变换

定理 5.1 设 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, $\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n'\in V$. 则 $\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n'$ 是 V 的一组基当且仅当存在唯一的 $P\in\mathrm{GL}_n(F)$ 使得

$$(\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n')=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)P. \tag{1}$$

(此时称 P 是从基底 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 到基底 $\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n'$ 的变换矩阵.)

证明. 设 $P\in\mathrm{GL}_n(F)$ 使得 (1) 成立. 若存在 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in F$ 使得

$$\alpha_1\mathbf{e}_1'+\cdots+\alpha_n\mathbf{e}_n'=\mathbf{0}.$$

则

$$(\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n')\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)P\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 线性无关, 所以

$$P\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

因为 P 满秩, 所以 $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$. 于是 $\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n'$ 线性无关. 因为 $\dim(V)=n$, 所以 $\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n'$ 是 V 的一组基.

反之, 设 $\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n'$ 是 V 的一组基. 因为 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, 所以存在 $P\in\mathrm{M}_n(F)$ 使得 (1) 成立. 我们首先证明 P 可逆. 否则, P 不满秩, 从而存在 $\beta_1,\ldots,\beta_n\in F$, 不全为零, 使得

$$P\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

由 (1),

$$\beta_1\mathbf{e}_1'+\cdots+\beta_n\mathbf{e}_n'=\mathbf{0},$$

即 $\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n'$ 线性相关. 矛盾. 于是 $P\in\mathrm{GL}_n(F)$.

再设 $Q\in\mathrm{GL}_n(F)$ 使得

$$(\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n')=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)Q.$$

则 $(\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0})=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)(P-Q)$. 由 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 的线性无关性可知 $P-Q=O$, 即 $P=Q$. 唯一性成立. $\square$

定理 5.2 设 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_n$ 是 V 的两组基, P 是从第一组基到第二组基的转换矩阵. 设 $\mathbf{x}\in V$ 在这两组基下的坐标分别是 $(x_1,\ldots,x_n)^t$ 和 $(x'_1,\ldots,,x'_n)^t$. 则

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

证明. 我们计算

$$\mathbf{x} = (\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_n)\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)P\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

由坐标的唯一性可知

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 5.3 设 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的标准基. 证明

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

也是一组基. 设 $\mathbf{x}=(5,1)^t$. 求 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 下的坐标.

证明. 通过矩阵表示, 我们有

$$(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) = (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{P}.$$

因为 A 可逆, 所以由定理 *5.1* 可知, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 也是一组基. 计算得

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

再根据定理 *5.2*, $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 下的坐标是

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

例 5.4 判断 $p_1 = x(x-1), p_2 = x(x-2), p_3 = x(x-2)+1$ 在 $F[x]^{(3)}$ 中 是不是一组基.

解. 因为 $p_1 = x^2 - x$, $p_2 = x^2 - 2x$, $p_3 = x^2 - 2x + 1$, 所以

$$(p_1, p_2, p_3) = (1, x, x^2) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P}.$$

因为 $\det(P) = 1 \neq 0$, 所以 A 可逆. 由定理 *5.1*, p_1, p_2, p_3 是一组基.

5.2 线性映射的矩阵表示

在本小节中 V 是 n 维线性空间, W 是 m 维线性空间. 它们具有共同的基域 F. 再设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ 是 W 的一组基.

定理 5.5 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. 则存在唯一的 $A \in F^{m\times n}$ 使得对任意 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, $\phi(\mathbf{x})$ 在 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ 下的坐标是

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

称 A 是 ϕ 在基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ 下的矩阵表示.

证明. (存在性) 设

$$\phi(\mathbf{e}_j) = a_{1,j}\epsilon_1 + \cdots + a_{m,j}\epsilon_m,$$

$j = 1, 2, \ldots, n$. 令

$$A = (a_{i,j})_{i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n}.$$

则 $\phi(\mathbf{e}_j) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)\vec{A}^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 于是,

$$(\phi(\mathbf{e}_1), \ldots, \phi(\mathbf{e}_n)) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)A.$$

由此可知,

$$\phi(\mathbf{x}) = (\phi(\mathbf{e}_1), \ldots, \phi(\mathbf{e}_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

由坐标的唯一性可知 (2) 成立.

(唯一性) 再设 $B \in F^{m\times n}$ 使得把 (2) 中 A 换成 B 后等式成立. 则对于任意 $j \in \{1,2,\ldots,n\}$,

$$\phi(\mathbf{e}_j) = (\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m)\vec{B}^{(j)}.$$

由坐标的唯一性可知 $\vec{B}^{(j)} = \vec{A}^{(j)}$, $j = 1,2,\ldots,n$. 于是 $A = B$. $\square$

例 5.6 设 $f \in \mathrm{Hom}(V,F)$, 即 f 是 V 上的线性函数. 求 f 在 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 *1* 下的矩阵.

解. 设 $f(\mathbf{e}_j) = \alpha_j$, $j = 1,2,\ldots,n$. 则 f 在上述基底下的矩阵是 $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. 对任意 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, $f(\mathbf{x})$ 关于 1 的坐标和其本身相同. 于是

$$f(\mathbf{x}) = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1x_1 + \cdots + \alpha_nx_n.$$

例 5.7 设 $\phi : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ 是 d/dx. 求 ϕ 在 $1,x,\ldots,x^{n-1}$ 和 $1,x,\ldots,x^{n-1}$ 下的矩阵.

解. 注意到, $\phi(1) = 0$, $\phi(x^k) = kx^{k-1}$, $k = 1,2\ldots,n-1$.

于是,

$$
\begin{aligned}
&(\phi(1), \phi(x), \phi(x^2), \ldots, \phi(x^{n-1})) \\
&= (1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A}.
\end{aligned}
$$

当选取基底为

$$1, x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \ldots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

时, 则 ϕ 的矩阵表示是

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 5.8 设 $W = F^n$ 且 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 是其标准基. 由线性映射基本定理*II*(定理 *4.11*)可知存在$\phi \in \mathrm{Hom}(V, F^n)$ 使得

$\phi(\mathbf{e}_j)=\epsilon_j$, $j=1,2,\ldots,n$. 则 ϕ 关于这两组基的矩阵表示是 n 阶单位方阵. 由坐标的唯一性可知, ϕ 是线性同构. 但这个同构不是“自然的”, 因为它的定义依赖于基底的选择.

6 对偶空间

在本节中 V 是域 F 上的 n 维线性空间.

6.1 对偶基

线性空间 $\mathrm{Hom}(V,F)$ 称为 V 的对偶空间, 记为 V^*. 换言之, V^* 是 V 上所有线性函数的集合, 其中的加法和数乘由 $\mathrm{Map}(V,F)$ 给出.

例 6.1 设 $V=\mathbb{R}^2$, $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 是标准基. 则 V^* 是如下线性函数的集合: 对任意的 $a,b\in\mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & ax+by. \end{array}$$

注意到对于不同的 a,b, f 是不一样的.

从几何上看非零向量 $\mathbf{v}=(-b,a)^t$ 代表直线 $\langle\mathbf{v}\rangle$, 而 $ax+by=0$ 代表该直线的方程, 即 $\langle\mathbf{v}\rangle$ 是 $ax+by=0$ 的解空间.

对偶空间的想法可以追溯到我们上学期学的知识: 一个子空间既可以通过它的一组生成元张成又可以看成某个齐次线性方程组的解. 这两个观点在处理具体的例子中各有所长. 证明关于矩阵秩的(不)等式也是通过对偶定理把像空间(矩阵列生成的空间)的维数转换为核空间(矩阵对应的齐次线性方程组的解空间)的维数.

定理 6.2 *设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 则在 V^* 中存在唯一的一组基 $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*$ 满足 $\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \delta_{i,j}, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. 特别地, $\dim(V^*){=}n$. ($\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*$ 称为 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 的对偶基.)*

证明. 对 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, 设 $\mathbf{e}_i^* \in V^*$ 满足 $\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \delta_{i,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 由线性映射基本定理 II 可知这样的 $\mathbf{e}_i^*$ 存在且唯一. 我们只要证明 $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*$ 是 V^* 的基即可.

设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ 使得 $\alpha_1 \mathbf{e}_1^* + \cdots \alpha_n \mathbf{e}_n^* = \mathbf{0}^*$, 其中 $\mathbf{0}^*$ 代表 V^* 中的零元, 即零函数. 设 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. 则

$$0 = \mathbf{0}^*(\mathbf{e}_j) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i^* \right) (\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{i,j} = \alpha_j.$$

于是 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, 即 $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*$ 线性无关.

再设 $f \in V^*$ 且 $f(\mathbf{e}_j) = \beta_j, j = 1, 2, \ldots, n$. 令

$$g = \beta_1 \mathbf{e}_1^* + \cdots + \beta_n \mathbf{e}_n^*.$$

则对于任意 $j \in \{1.2. \ldots, n\}$, 我们有

$$g(\mathbf{e}_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{e}_i^*\right)(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \delta_{i,j} = \beta_j.$$

再由线性映射基本定理 II 中的唯一性可知, $f = g$. $\square$

例 6.3 对偶基为取坐标提供方便. 设 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$. 证明: 对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $x_i = \mathbf{e}_i^*(\mathbf{x})$.

证明. 我们计算

$$\mathbf{e}_i^*(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \delta_{i,j} = x_i. \quad \square$$

由此我们可以得出 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 当且仅当 $\mathbf{e}_i^*(\mathbf{x}) = 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

引理 6.4 设 $f_1, \ldots, f_n$ 是 V^* 的一组基, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 则 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ 当且仅当 $f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{y})$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

证明. 设 $\mathbf{z} \in V$. 只要证明:

$$\mathbf{z} = \mathbf{0} \iff f_1(\mathbf{z}) = \cdots = f_n(\mathbf{z}) = \mathbf{0}.$$

"$\Longrightarrow$" 是显然的.

"$\Longleftarrow$". 假设 $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. 由线性映射基本定理 II 可知, 存在 $f \in V^*$ 使得 $f(\mathbf{z}) = 1$. 因为 $f_1, \ldots, f_n$ 是 V^* 的基底, 所以存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ 使得 $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$. 于是, $f(\mathbf{z}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right)(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$. 矛盾. $\square$

定理 6.5 下列映射

$$\begin{array}{rccc} \phi: & V & \longrightarrow & V^{**} \\ & \mathbf{v} & \mapsto & \epsilon_{\mathbf{v}} \end{array}$$

是线性同构, 其中

$$\begin{array}{rccc} \epsilon_{\mathbf{v}}: & V^* & \longrightarrow & F \\ & f & \mapsto & f(\mathbf{v}). \end{array}$$

证明. 先验证 $\epsilon_{\mathbf{v}} \in V^{**}$. 设 $\alpha, \beta \in F$, $f, g \in V^*$. 则

$$\epsilon_{\mathbf{v}}(\alpha f+\beta g) = (\alpha f+\beta g)(\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})+\beta g(\mathbf{v}) = \alpha\epsilon_{\mathbf{v}}(f)+\beta\epsilon_{\mathbf{v}}(g).$$

验证完毕. 于是 ϕ 是良定义的.

再验证 ϕ 是线性的. 设 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\alpha, \beta \in F$. 则对任意的 $f \in V^*$,

$$\epsilon_{\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}}(f) = f(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u})+\beta f(\mathbf{v}) = \alpha\epsilon_{\mathbf{u}}(f)+\beta\epsilon_{\mathbf{v}}(f).$$

于是 $\epsilon_{\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}} = \alpha\epsilon_{\mathbf{u}} + \beta\epsilon_{\mathbf{v}}$, 即 $\phi(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\phi(\mathbf{u}) + \beta\phi(\mathbf{v})$.

最后, 我们验证 ϕ 为双射. 由定理 6.2 可知, $\dim(V^{**})=n$. 因为 $\mathrm{im}(\phi) \subset V^{**}$ 且 $\dim(\ker(\phi)) + \dim(\mathrm{im}(\phi)) = n$. 我们只要验证 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}\}$ 即可. 设 $\phi(\mathbf{v}) = \mathbf{0}^{**}$, 其中 $\mathbf{0}^{**}$ 代表 V^{**} 中的零元. 则对任意的 $f \in V^*$, $f(\mathbf{v}) = 0$. 由引理 6.4 可知, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. □

上述定理中的线性同构 ϕ 的定义与基底无关, 此时我们说 V 与 V^{**} 自然同构.

6.2　应用

例 6.6 设 $U \subset F^4$ 由向量

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

生成. 求行数最小的矩阵 A 使得 U 是以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组的解.

解. 设所求矩阵为 A. 可直接验证 $\dim(U) = 2$. 于是 A 有两行且这两行线性无关. 设 A 中的一行是 (x_1, x_2, x_3, x_4). 则它是方程组

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^t \\ \mathbf{u}_2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的解. 解空间的基给出我们所需要的向量. 具体方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

它的两个线性无关解是设 $U\subset F^4$ 由向量

$$\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\quad \text{和}\quad \mathbf{x}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow A=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1^t\\ \mathbf{x}_2^t\end{pmatrix}.$$

例 6.7 设 $U=\langle\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k\rangle$ 和 $W=\langle\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m\rangle$ 是 F^n 的两个子空间. 同时它们分别是 $A\in F^{\ell\times n}$ 和 $B\in F^{s\times n}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间. 则 $U+W$ 的一组生成元是 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k,\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m$. 但构造矩阵 C 使得 $U+W$ 是以 C 为矩阵的齐次线性方程组的解空间就不那么直接. 类似地, 构造 $U\cap W$ 的生成元比较麻烦, 但以

$$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$$

为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间等于 $U\cap W$.

设 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_\ell\in V$ 和 $f_1,\ldots,f_k\in V^*$. 令

$$M\begin{pmatrix}f_1, & \ldots, & f_k\\ \mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{v}_\ell\end{pmatrix}=(f_i(\mathbf{v}_j))_{k\times\ell}.$$

引理 6.8 设 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_\ell\in V$ 和 $f_1,\ldots,f_k\in V^*$. 再设

$$\mathbf{v}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_\ell\mathbf{v}_\ell.$$

则

$$\begin{pmatrix} f_1(\mathbf{v}) \\ \vdots \\ f_k(\mathbf{v}) \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} f_1, & \ldots, & f_k \\ \mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{v}_\ell \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_\ell \end{pmatrix}.$$

证明. 等式左侧第 i 行是 $f_i(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j f_i(\mathbf{v}_j)$. 它恰好是等式右边的第 i 行, $i = 1, 2, \ldots, k$. □

引理 6.9 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \in V$. 则下列断言等价:

(i) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell$ 线性相关;

(ii) 对任意 $k \in \mathbb{Z}^+$, $f_1, \ldots, f_k \in V^*$,

$$\operatorname{rank}\left(M\begin{pmatrix} f_1, & \ldots, & f_k \\ \mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{v}_\ell \end{pmatrix}\right) < \ell;$$

(iii) 设 $g_1, \ldots, g_n$ 是 V^* 的一组基,

$$\operatorname{rank}\left(M\begin{pmatrix} g_1, & \ldots, & g_n \\ \mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{v}_\ell \end{pmatrix}\right) < \ell.$$

证明. (i) $\Longrightarrow$ (ii). 设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in F$ 不全为零使得

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_\ell\mathbf{v}_\ell = \mathbf{0}.$$

由引理 6.8,

$$M\begin{pmatrix} f_1, & \ldots, & f_k \\ \mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{v}_\ell \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ 不全为零, 所以上述方程组的系数矩阵不可能列满秩.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). 显然.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). 由 (iii) 中矩阵秩的条件可知, 存在 $\beta_1, \ldots, \beta_\ell \in F$ 不全为零使得

$$M\begin{pmatrix} g_1, & \ldots, & g_n \\ \mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{v}_\ell \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

令 $\mathbf{v} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_\ell\mathbf{v}_\ell$. 由引理 6.8 可知, $g_i(\mathbf{v}) = 0 = g_i(\mathbf{0})$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 于是 $\mathbf{v} = 0$ (见引理 6.4). (i) 成立. □

定理 6.10 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \in V$ 和 $g_1, \ldots, g_n \in V^*$ 是一组基. 则

$$\dim\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle = \operatorname{rank}\left(M\begin{pmatrix} g_1, & \ldots, & g_n \\ \mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{v}_\ell \end{pmatrix}\right).$$

证明. 设

$$r = \operatorname{rank}\left(M\begin{pmatrix} g_1, & \ldots, & g_n \\ \mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{v}_\ell \end{pmatrix}\right).$$

不妨设该矩阵中前 r 列线性无关. 我们只要证明 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ 是 $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \rangle$ 的一组基即可.

注意到这前 r 列组成的子矩阵

$$M\begin{pmatrix} g_1, & \ldots, & g_n \\ \mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{v}_r \end{pmatrix}$$

的秩等于 r, 由引理 6.9, $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r$ 线性无关. 设 $j\in\{r+1,r+2,\ldots,\ell\}$. 则子矩阵

$$M\begin{pmatrix} g_1, & \ldots, & g_{n-1} & g_n \\ \mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{v}_r & \mathbf{v}_j \end{pmatrix}$$

的秩仍等于 r, 故秩小于 $r+1$. 再由引理 6.9, $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r,\mathbf{v}_j$ 线性相关. 于是 $\mathbf{v}_j\in\langle\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r\rangle$. 由此可知 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r$ 是 $\langle\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_\ell\rangle$ 的一组基. $\square$

7 双线性型

本节中 V 是 F 上的 n 维线性空间, $n>0$.

7.1 定义和矩阵表示

设

$$\begin{aligned} f:\ V\times V &\longrightarrow\quad F \\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) &\mapsto\quad f(\mathbf{x},\mathbf{y}). \end{aligned}$$

如果对任意的 $\alpha,\beta\in F$ 和 $\mathbf{z}\in V$ 满足

$$f(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{z},\mathbf{y})=\alpha f(\mathbf{x},\mathbf{y})+\beta f(\mathbf{z},\mathbf{y})$$

和

$$f(\mathbf{x},\alpha\mathbf{y}+\beta\mathbf{z})=\alpha f(\mathbf{x},\mathbf{y})+\beta f(\mathbf{x},\mathbf{z}),$$

则称 f 是 V 上的双线性型.

例 7.1 设 f 是 V 上的双线性型. 则对任意的 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ 和 $\alpha, \beta \in F$, 我们有:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) &= f(\mathbf{u}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) \\ &= f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

且

$$f(\alpha\mathbf{x}, \beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}, \beta\mathbf{y}) = \alpha\beta f(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

此外

$$f(\mathbf{0}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{0}+\mathbf{0}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{0}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{0}, \mathbf{y}) \implies f(\mathbf{0}, \mathbf{y}) = 0.$$

同理, $f(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0$.

定理 7.2 设 V 的一组基是 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, f 是 V 上的双线性型. 则存在唯一的矩阵 $A \in \mathrm{M}_n(F)$ 使得,

$$\forall\ \mathbf{x} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

我们有

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

事实上, $A = (f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))_{n\times n}$. 称 A 是 f 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵表示.

证明. 我们计算

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{e}_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i f\left(\mathbf{e}_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{e}_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j f(\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)x_i y_j.
\end{aligned}$$

令 $A = (f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j))_{n\times n}$. 由上式直接验证得

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

再设 $B = (b_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(F)$ 使得

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (x_1,\ldots,x_n)B\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

对 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, 取 $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i, \mathbf{y} = \mathbf{e}_j$, 则

$$f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \Big(0, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, \ldots, 0\Big) \;\; B \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \;\; \to j = \vec{B}_i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \;\; \to j = b_{i,j}.$$

于是 $A = B$. $\square$

例 7.3 设 $V = \mathbb{R}^2$. 对任意的

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

验证 f 是 V 上的双线性型, 并求它在标准基下的矩阵.

解. 设 $\alpha, \beta \in F, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$,

$$\begin{aligned} f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{z}, \mathbf{y}) &= \det(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \det(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \det(\beta\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ &= \alpha \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta \det(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{z}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

类似 f 对第二个变元线性. 于是 f 是双线性型.

注意到 $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 0$, $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$ 而 $f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = -1$. 于是

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, x_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

设 f 是 V 上的双线性型, f 在 V 的两组基 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1,\dots,\epsilon_n$ 下的矩阵分别是 A 和 B. 再设

$$(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)=(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)P,\quad P\in \mathrm{GL}_n(F).$$

设

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n=u_1\epsilon_1+\cdots+u_n\epsilon_n,$$

和

$$\mathbf{y}=y_1\mathbf{e}_1+\cdots+y_n\mathbf{e}_n=v_1\epsilon_1+\cdots+v_n\epsilon_n.$$

则由坐标变换公式可得

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x},\mathbf{y})&=(x_1,\dots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\\&=(u_1,\dots,u_n)\underbrace{P^tAP}_{B}\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

根据定理 7.2, $B=P^tAP$. 反之, 给定 F^n 的一组基 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ 和 $P\in\mathrm{GL}_n(F)$, f 在给定基底下的矩阵是 A, 则 $(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)=(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)P$ 是 F^n 的一组基. 由上述计算可知 f 在新的基底下的矩阵是 P^tAP.

定义 7.4 设 $A,B\in \mathrm{M}_n(F)$. 如果存在 $P\in\mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $B=P^tAP$, 则称 B 合同于 A, 记为 $B\sim_c A$.

我们来验证 $\sim_c$ 是等价关系. 对任意 $A \in \mathrm{M}_n(F)$, $A = E^tAE \implies A \sim_c A$. 自反性成立. 设 $B \sim_c A$. 则存在 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $B = P^tAP$. 于是

$$A = (P^t)^{-1}BP^{-1} = (P^{-1})^tBP^{-1} \implies A \sim_c B.$$

对称性成立. 设 $A \sim_c B$, $B \sim_c C$. 则存在 $P, Q \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得

$$\begin{aligned} &A = P^tBP,\ B = Q^tCQ \\ &\implies A = P^tQ^tCQP = (QP)^tC(QP) \\ &\implies A \sim_C C. \end{aligned}$$

传递性成立.

从以上论述我们看出, 一个双线性型在不同基底下的矩阵是合同的. 而两个彼此合同的矩阵一定是一个双线性型在不同基底下的矩阵. 于是, 研究双线性型等价于研究方阵在合同意义下的等价类. 利用矩阵的语言, 我们所要研究的问题是: $\mathrm{M}_n(F)/\sim_c$ 含有多少不同的等价类? 在每个等价类中可否找出一个"标准" 的代表元? 这个代表矩阵中应该含有尽可能多个 0, 而非零元素出现的位置应该尽可能有规律.

命题 7.5 *设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 若 $A \sim_c B$, 则* $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.

证明. 设 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $A = P^tBP$. 因为 P 满秩, 所

以 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$. (见上学期讲义第二章第五讲推论 6.27) $\square$.

定义 7.6 设 f 是 V 上的双线性型, A 是 f 在 V 的某组基下的矩阵. 则 f 的秩定义为 $\operatorname{rank}(A)$, 记为 $\operatorname{rank}(f)$.

由上述命题可知, $\operatorname{rank}(f)$ 是良定义的. 下例说明双线性型可以通过矩阵给出.

例 7.7 设 $A\in \mathrm{M}_n(F)$. 则

$$\begin{aligned} f: \quad F^n\times F^n &\longrightarrow \quad F\\ \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} &\mapsto \quad (x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

是 F^n 上的双线性型, f 在标准基下的矩阵是 A.

证明. 设 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^t,\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)^t,\mathbf{z}=(z_1,\ldots,z_n)^t$, $\alpha,\beta\in F$. 则

$$\begin{aligned} f(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{z},\mathbf{y}) &= (\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{z})^tA\mathbf{y}\\ &=\alpha(\mathbf{x}^tA\mathbf{y})+\beta(\mathbf{z}^tA\mathbf{y})\\ &=\alpha f(\mathbf{x},\mathbf{y})+\beta f(\mathbf{z},\mathbf{y}).\end{aligned}$$

于是, f 对第一个变元线性. 类似可验证 f 对第二个变元也线性. 从而 f 是双线性型. 设 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 F^n 的标

准基, $A=(a_{i,j})_{n\times n}$. 则 $f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=a_{i,j}$, $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$. 由定理 7.2, f 在标准基下的矩阵是 A. □

定义 7.8 设 f 是 V 上的双线性型. 如果对任意的 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$, $f(\mathbf{x},\mathbf{y})=f(\mathbf{y},\mathbf{x})$, 则称 f 是对称的. 如果对任意的 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$, $f(\mathbf{x},\mathbf{y})=-f(\mathbf{y},\mathbf{x})$, 则称 f 是斜对称的.

例 7.9 设 V 的基是 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$, V 上的双线性型 f 在该基下的矩阵是 A. 证明 A (斜)对称当且仅当 f (斜)对称.

证明. 设 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{y}=y_1\mathbf{e}_1+\cdots+y_n\mathbf{e}_n$. 则

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y})=(x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\quad \text{和}\quad f(\mathbf{y},\mathbf{x})=(y_1,\ldots,y_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}. \tag{3}$$

注意到 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})\in F\implies f(\mathbf{x},\mathbf{y})^t=f(\mathbf{y},\mathbf{x})$.

如果 $A=A^t$, 则 (3) 蕴含 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})=f(\mathbf{y},\mathbf{x})$. 反之, 设 f 对称. 则 $f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=f(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_i), i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$. 由定理 7.2 可知, A 对称. 类似地, 可证明斜对称情形的结论.

我们用 $\mathcal{L}_2(V)$ 记 V 上所有双线性型的集合, $\mathcal{L}_2^+(V)$ 和 $\mathcal{L}_2^-(V)$ 分别记 V 上对称和斜对称双线性型的集合. 可直接验证它们都是 $\mathrm{Map}(V\times V,F)$ 的子空间.

命题 7.10 设 F 的特征不等于 2. 则

$$\mathcal{L}_2(V)=\mathcal{L}_2^+(V)\oplus\mathcal{L}_2^-(V).$$

证明. 设 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathcal{L}_2(V)$. 则

$$f^+=\frac{1}{2}(f(\mathbf{x},\mathbf{y})+f(\mathbf{y},\mathbf{x}))\in\mathcal{L}_2^+(V), f^-=\frac{1}{2}(f(\mathbf{x},\mathbf{y})-f(\mathbf{y},\mathbf{x}))\in\mathcal{L}_2^-(V),$$

于是 $\mathcal{L}_2(V)=\mathcal{L}_2^+(V)+\mathcal{L}_2^-(V)$. 设 $g\in\mathcal{L}_2^+(V)\cap\mathcal{L}_2^-(V)$. 则 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})=f(\mathbf{y},\mathbf{x})$ 且 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})=-f(\mathbf{y},\mathbf{x})$. 于是

$$f(\mathbf{y},\mathbf{x})=-f(\mathbf{y},\mathbf{x})\implies 2f(\mathbf{y},\mathbf{x})=0\implies f(\mathbf{y},\mathbf{x})=0.$$

由此可知, $\mathcal{L}_2^+(V)\cap\mathcal{L}_2^-(V)=\{\tilde{\mathbf{0}}\}$. 从而

$$\mathcal{L}_2(V)=\mathcal{L}_2^+(V)\oplus\mathcal{L}_2^-(V).\quad\square$$

例 7.11 *合同关系保持对称和斜对称性. 设 $A\in\mathrm{M}_n(F)$ (斜)对称, 且 $A\sim_c B$. 证明 B 也(斜)对称.*

证明. 设 A 斜对称. 因为 $A\sim_c B$, 所以存在 $P\in\mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $B=P^tAP$. 则

$$B^t=(P^tAP)^t=P^tA^tP=-P^tAP=-B.$$

对称情形类似. $\square$

附录: 利用对偶表示计算子空间的交(习题 1 第二问)

设 $A=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)\in\mathbb{R}^{5\times 3}$. 则

$$A=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\6&3&6\\4&0&5\\7&5&6\\-2&-2&-5\end{pmatrix}.$$

设 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_5)^t$. 利用 `Maple` 命令

$$\texttt{LinearAlgebra}:-\texttt{NullSpace}$$

求解齐次线性方程组

$$A^t\mathbf{x}=\mathbf{0}.$$

得其解空间得一组基

$$\mathbf{w}_1=\begin{pmatrix}-14\\-2\\5\\0\\11\end{pmatrix},\ \mathbf{w}_2=\begin{pmatrix}-1\\-19\\9\\11\\0\end{pmatrix}.$$

类似地, 设 $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \in \mathbb{R}^{5\times 3}$. 则

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

利用 `Maple` 命令

$$\texttt{LinearAlgebra}:-\texttt{NullSpace}$$

求解齐次线性方程组

$$B^t\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

得其解空间得一组基

$$\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

设 $C = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4) \in \mathbb{R}^{5\times 4}$. 再次利用同样得命令求

$$C^t\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

的解空间的一组基, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

它们构成 $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle \cap \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ 的一组基.